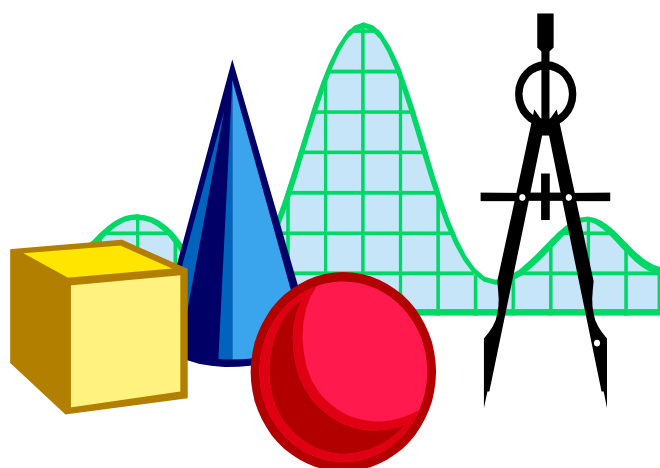


TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG  
TỔ TOÁN TIN

TÀI LIỆU ÔN THI TNTHPT  
MÔN TOÁN  
NĂM HỌC 2024 - 2025



*(LƯU HÀNH NỘI BỘ)*

*Ea Phê, tháng 10 năm 2024*

## KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH 1 ẨN1. Phương trình bậc nhất:  $ax + b = 0$ Giải và biện luận phương trình  $ax + b = 0$  (1)Tập xác định:  $D = R$ 

- $a \neq 0$ : (1)  $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$   
 $a = 0$ : (1)  $\Leftrightarrow 0x = -b$
- $b \neq 0$ : (1) vô nghiệm  
 $b = 0$ : (1) có tập nghiệm  $R$

2. Bất phương trình bậc nhất:  $ax + b > 0$ Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất:  $ax + b > 0$  (1)Tập xác định:  $D = R$ 

- $a > 0$ : (1)  $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$
- $a < 0$ : (1)  $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$   
 $a = 0$ : (1)  $\Leftrightarrow 0x > -b$
- $b \leq 0$ : (1) Vô nghiệm  
 $b > 0$ : (1) có tập nghiệm  $R$

3. Nhị thức bậc nhất:  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ )Nhị thức  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  khi  $x$  nhận các giá trị thuộc  $(-\frac{b}{a}; +\infty)$  và trái dấu với hệ số  $a$ khi  $x$  nhận các giá trị thuộc  $(-\infty; -\frac{b}{a})$ II. TAM THỨC BẬC HAI1. Phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )Xét  $\Delta = b^2 - 4ac$  ( $\Delta' = b^2 - ac$ )

- Nếu  $\Delta < 0$  ( $\Delta' < 0$ ) thì (1) vô nghiệm
- Nếu  $\Delta = 0$  ( $\Delta' = 0$ ) thì (1) có nghiệm kép  $x = -\frac{b}{2a}$  ( $x = -\frac{b'}{a}$ )
- Nếu  $\Delta > 0$  ( $\Delta' > 0$ ) thì (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left( x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \right)$$

## 2. Định lí Viet

a. Định lí Viet thuận: Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b. Định lí Viet đảo: Nếu có 2 số  $x_1, x_2$  mà  $x_1 + x_2 = S$  và  $x_1 x_2 = P$  thì  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - SX + P = 0$ 

c. Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:

Cho phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ 

- $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

$$\bullet \quad 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

### 3. Dấu tam thức bậc hai:

Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

- Nếu  $\Delta < 0$  thì  $a.f(x) > 0 \quad \forall x \in R$
- Nếu  $\Delta = 0$  thì  $a.f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$ ,

Dấu “=” xảy ra khi  $x = -\frac{b}{2a}$

- Nếu  $\Delta > 0$  thì  $f(x) = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$   
và  $a.f(x) < 0 \quad \forall x \in (x_1; x_2)$  và  $a.f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Điều kiện tam thức bậc hai không đổi dấu trên R

- $\forall x \in R, a.f(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$
- $\forall x \in R, a.f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0$

## BÀI 2. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

### 1 Mở đầu

Nhiều bài toán của toán học, vật li, hóa học, sinh học, kỹ thuật, ... đòi hỏi phải tìm giới hạn dạng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó  $f(x)$  là một hàm số đã cho của đối số  $x$ .

Qua Đại số và Giải tích 11, ta biết định nghĩa và kí hiệu của số gia đối số và số gia tương ứng của hàm số:

- Số gia đối số là:  $\Delta x = x - x_0$
- Số gia tương ứng của hàm số là:  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Ta sẽ dùng khái niệm và kí hiệu đó viết các giới hạn trên:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

### 2 Định nghĩa đạo hàm

Cho hàm số  $y = f(x)$ , xác định trên  $(a; b)$  và  $x_0 \in (a; b)$

Giới hạn, nếu có, của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số tại  $x_0$ , khi số gia đối số dần tới 0, được gọi là đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ .

Đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại  $x_0$  được kí hiệu là  $y'(x_0)$  hoặc  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{hoặc} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

### 3 Đạo hàm một bên

a. Đạo hàm bên trái của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ , kí hiệu là  $f'(x_0^-)$  được định nghĩa là:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó  $x \rightarrow x_0^-$  được hiểu là  $x \rightarrow x_0$  và  $x < x_0$ .

b. Đạo hàm bên phải của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ , kí hiệu là  $f'(x_0^+)$  được định nghĩa là:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó  $x \rightarrow x_0^+$  được hiểu là  $x \rightarrow x_0$  và  $x > x_0$ .

**Định lí:** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0$  thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu  $f'(x_0^-)$  và  $f'(x_0^+)$  tồn tại và bằng nhau. Khi đó ta có:  $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$

4 Đạo hàm trên một khoảng

**Định nghĩa:**

- a. Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.
- b. Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là có đạo hàm trên đoạn  $[a; b]$  nếu nó có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  và có đạo hàm bên phải tại  $a$ , đạo hàm bên trái tại  $b$ .

**Qui ước:** Từ nay, khi ta nói hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, mà không nói rõ trên khoảng nào, thì điều đó có nghĩa là đạo hàm tồn tại với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

5 Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của h.số

**Định lí:** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0$  thì nó liên tục tại điểm đó.

**Chú ý:** 1. Đảo lại không đúng, tức là **một hàm số liên tục tại điểm  $x_0$  có thể không có đạo hàm tại điểm đó**

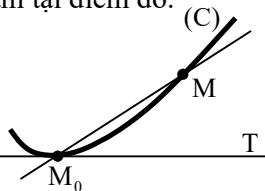
2. Như vậy, hàm số không liên tục tại  $x_0$  thì không có đạo hàm tại điểm đó.

6 Ý nghĩa của đạo hàm

1. Ý nghĩa hình học

1.1. Tiếp tuyến của đường cong phẳng:

Cho đường cong phẳng  $(C)$  và một điểm cố định  $M_0$  trên  $(C)$ ,  $M$  là điểm di động trên  $(C)$ . Khi đó  $M_0M$  là một cát tuyến của  $(C)$ .

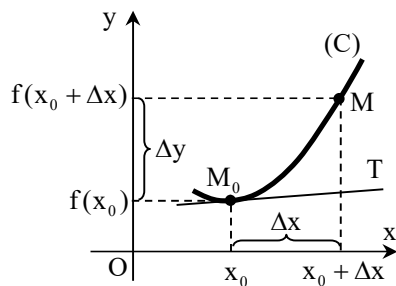


**Định nghĩa:** Nếu cát tuyến  $M_0M$  có vị trí giới hạn  $M_0T$  khi điểm  $M$  di chuyển trên  $(C)$  và dần tới điểm  $M_0$  thì đường thẳng  $M_0T$  được gọi là tiếp tuyến của đường cong  $(C)$  tại điểm  $M_0$ . Điểm  $M_0$  được gọi là tiếp điểm.

1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$  và có đạo hàm tại  $x_0 \in (a; b)$ , gọi  $(C)$  là đồ thị hàm số đó.

**Định lí 1:** Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  tại điểm  $x_0$  là hệ số góc của tiếp tuyến  $M_0T$  của  $(C)$  tại điểm  $M_0(x_0; f(x_0))$



1.3. Phương trình của tiếp tuyến:

**Định lí 2:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M_0(x_0; f(x_0))$  là :

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

1.4. Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Hệ số góc  $k$  của cát tuyến  $MN$  với đường cong  $(C): y = f(x)$ , biết  $M, N$  theo thứ tự có

hoành độ là  $x_M, x_N$  được cho bởi:  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$  với  $x_N \neq x_M$

- $f'(x_0)$  là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong  $(C)$  tại  $M(x_0; f(x_0))$

1.5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

a. Tiếp tuyến tại một điểm:

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C): y = f(x)$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

**Trong đó:** -  $M_0(x_0; y_0)$  gọi là tiếp điểm.

-  $k = f'(x_0)$  là hệ số góc.

**Các chú ý:** - Nếu cho  $x_0$  thì thế vào  $y = f(x)$  tìm  $y_0$ .

- Nếu cho  $y_0$  thì thế vào  $y = f(x)$  tìm  $x_0$ .

**b. Tiếp tuyến đi qua một điểm:**

Đề lập phương trình tiếp tuyến  $d$  với  $(C)$  biết  $d$  đi qua  $A(x_A; y_A)$ :

**Cách 1:** - Gọi  $M_0(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

- Phương trình đường thẳng  $d$  qua  $M_0$  với hệ số góc  $k = f'(x_0)$ :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

-  $A(x_A; y_A) \in d \Rightarrow y_A - y_0 = f'(x_0)(x_A - x_0)$

- Giải pt trên tìm  $x_0$ , tìm  $f'(x_0)$ , thế vào  $y = f(x)$  tìm  $y_0$ .

**Cách 2:** Dùng điều kiện tiếp xúc (Sẽ học ở lớp 12)

**c. Tiếp tuyến biết hệ số góc:**

- Giải phương trình:  $f'(x) = k \Rightarrow$  các hoành độ tiếp điểm.

- Thế vào  $y = f(x)$  để tìm tung độ.

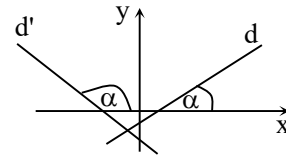
- Viết tiếp tuyến:  $y - y_0 = k.(x - x_0)$

**Chú ý:**

- tiếp tuyến  $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$

- tiếp tuyến  $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k.a = -1$

-  $k = \tan \alpha$ , với  $\alpha$  là góc giữa  $d$  với tia  $Ox$ .



**2. Ý nghĩa vật lí**

**a. Vận tốc tức thời:** Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:  $s = f(t)$ , với  $f(t)$  là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t_0$  là đạo hàm của hàm số  $s = f(t)$  tại  $t_0$ .

$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)$$

**b. Cường độ tức thời:** Điện lượng  $Q$  truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình:  $Q = f(t)$ , với  $f(t)$  là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm  $t_0$  là đạo hàm của hàm số  $Q = f(t)$  tại  $t_0$ .

$$I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$$

**BÀI 3: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM**

**1. Đạo hàm của hàm tổng, hiệu, tích thương, hàm hợp**

1.  $(u - v + w)' = u' - v' + w'$

2.  $(ku)' = k.u'$ , với  $k$  là hằng số.

3.  $(u.v)' = u'v + v'u$

4.  $(u.v.w)' = u'vw + uv'w + uvw'$

5.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

6.  $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

7.  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

2. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của các hàm số hợp
$(C)' = 0$ , C hằng số	
$(x)' = 1$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

**CHUYÊN ĐỀ I**

**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

**Phần 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT**

**1) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số**

Giả sử  $K$  là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và  $y = f(x)$  là hàm số xác định trên  $K$ .

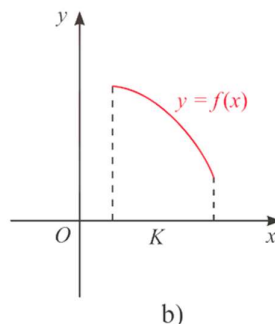
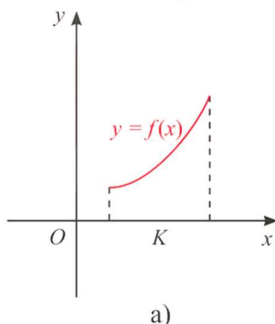
- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là đồng biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là nghịch biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

**Chú ý**

- Nếu hàm số đồng biến trên  $K$  thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.a).

- Nếu hàm số nghịch biến trên  $K$  thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.b).



- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên  $K$  còn được gọi chung là đơn điệu trên  $K$ . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập  $K$  thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

**ĐỊNH LÝ**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $K$ .

- a) Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $K$ .  
 b) Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $K$ .

**Chú ý**

- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp  $f'(x)$  bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng  $K$ .
- Người ta chứng minh được rằng, nếu  $f'(x) = 0$  với mọi  $x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  không đổi trên khoảng  $K$ .

**2) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số**

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số  $y = f(x)$  :

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i (i=1,2,...)$  mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
3. Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**PHẦN B. BÀI TẬP**

**TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1. (Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	↘	↗	↘	↗
		$-1$	$4$	$-1$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .                      B.  $(0; 1)$ .                      C.  $(-1; 1)$ .                      D.  $(-1; 0)$

**Câu 2. (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	↘	↗	↘	↗
		$0$	$3$	$0$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .                      B.  $(0; 1)$ .                      C.  $(-1; 0)$ .                      D.  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 3. (Mã 104 - 2017)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	+	0	-	-	+

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$                       B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$   
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$                       D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$

**Câu 4. (Kim Liên - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$y'$	-		-	+

- A.  $(1; +\infty)$ .                      B.  $(-\infty; 1)$ .                      C.  $(-1; +\infty)$ .                      D.  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 5. (Mã 101 - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-2$	$3$	$-2$	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-1;0)$                       B.  $(-\infty;0)$                       C.  $(1;+\infty)$                       D.  $(0;1)$

**Câu 6.** (Mã 102 - 2018) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$3$	$-2$	$+\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-1;+\infty)$ .                      B.  $(1;+\infty)$ .                      C.  $(-1;1)$ .                      D.  $(-\infty;1)$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$
$y'$		$+$	$0$	$-$
$y$	$-\infty$	$+\infty$	$4$	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ .  
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty;3)$ .  
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(3;+\infty)$ .  
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng  $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$  và  $(3;+\infty)$ .

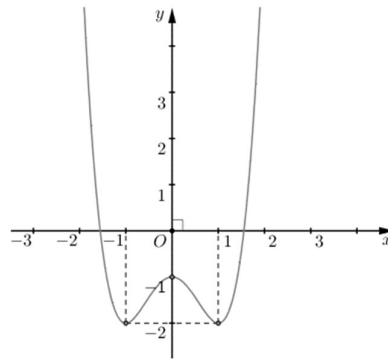
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$2$	$+\infty$	$4$	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

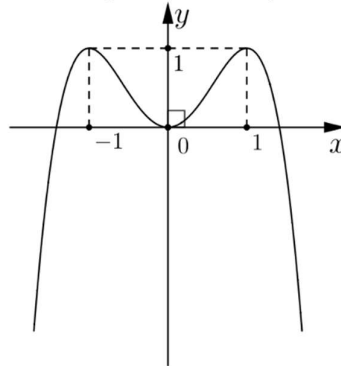
- A.  $(-1;1)$ .                      B.  $(0;1)$ .                      C.  $(4;+\infty)$ .                      D.  $(-\infty;2)$ .

**Câu 9.** (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.  $(-\infty; -1)$       B.  $(-1; 1)$       C.  $(-1; 0)$       D.  $(0; 1)$

**Câu 10. (Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.  $(-1; 0)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      C.  $(0; 1)$ .      D.  $(0; +\infty)$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ .      B.  $-2 \leq m \leq -1$ .      C.  $-2 < m < -1$ .      D.  $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$ .

**Câu 12.** Tìm điều kiện của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m \geq 2$ .      B.  $m < 2$ .      C.  $m < 0$ .      D.  $m \geq 0$ .

**Câu 13. (Mã 104 - 2017)** Cho hàm số  $y = \frac{mx+4m}{x+m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của  $S$ .

- A. 4      B. Vô số      C. 3      D. 5

**Câu 14. (THPT Hoa Lư A - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số

$$y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$$
 đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 1.      B. 0.      C. 2.      D. 3.

**Câu 15. (SGD&ĐT Bắc Giang - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số

$$y = \frac{x+m^2}{x+4}$$
 đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5.      B. 3.      C. 1.      D. 2.

**Câu 16. (Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số

$$y = \frac{x+4}{x+m}$$
 đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -7)$  là

- A.  $[4;7)$ .                      B.  $(4;7]$ .                      C.  $(4;7)$ .                      D.  $(4;+\infty)$ .

**Câu 17. (Mã 104-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+3m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -6)$ .

- A. 2                                      B. 6                                      C. Vô số                                      D. 1

**Câu 18. (Mã 101- 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+5m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -10)$ ?

- A. 2                                      B. Vô số                                      C. 1                                      D. 3

**Câu 19. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-2020; 2020)$  sao cho hàm số  $y = \frac{3x+18}{x-m}$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$ ?

- A. 2020.                                      B. 2026.                                      C. 2018.                                      D. 2023.

**Câu 20. (Sở Bình Thuận 2023)** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số  $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .                      B.  $(-1; +\infty)$ .                      C.  $(0; 2)$ .                      D.  $(-1; 0)$ .

**TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$		
$y'$		+	0	+	0	-
$y$				5		

Khi đó:

- a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -5)$  và  $(-3; -2)$
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 5)$
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$

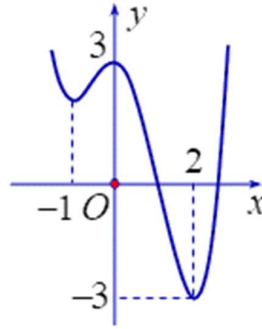
**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

$x$	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
$y'$		+	0	-	0	+

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 3)$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



**Khi đó**

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .
- c) Đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .
- d) Nghịch biến trên khoảng  $(0; 3)$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = \frac{mx-1}{m-4x}$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

a) Khi  $m = 0$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$

b) Ta có  $y' = -\frac{m^2-4}{(m-4x)^2}$ .

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$  khi  $a \leq m < b$ , khi đó  $b - a = 1$

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$  khi  $a \leq m < b$ , khi đó  $\log_b a^2 = 0$

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

a) Khi  $m = 0$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$

b) Khi  $m = 0$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$

c) Biết tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  là  $(-\infty; a]$  lúc đó:  $(-\infty; a] \cap (1; 2024) = (-\infty; 2024)$

d) Biết tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  là  $(-\infty; a]$  lúc đó, phương trình  $2^x = a$  có nghiệm  $x > 2$

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

a) Với  $m = 0$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$

b) Với  $m = 6$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(4; +\infty)$

c) Để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 4)$  thì  $m \leq 2$

d) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 4)$  là  $(-\infty; a]$ . Khi đó  $\lim_{x \rightarrow a} (x + 2024) = 2027$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

a) Khi  $m = 1$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$

b) Nếu  $m > 0$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-m; 3m)$ .

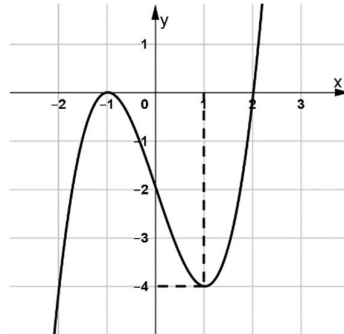
c) Nếu  $m < 0$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(3m; -m)$ .

d) Biết hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$  khi  $m \leq a$  hoặc  $m \geq b$ , khi đó  $a + b = \frac{2}{3}$

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

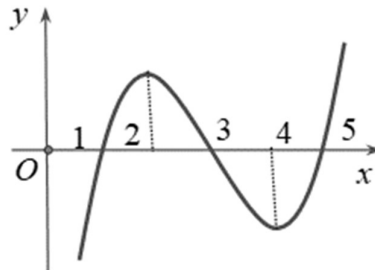
- a) Với  $m = 0$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$
- b)  $y'(2m - 1) = 0$
- c) Nếu  $m \geq 1$  thì hàm số không thể nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$
- d) Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng thì  $m \leq a$ . Khi đó phương trình  $2024^x = a$  có 1 nghiệm.

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2)$ .



Khi đó

- a) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$
  - b) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$
  - c) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(-1; 0)$
  - d) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(-2; -1)$
- Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  biết hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(x+1)$ .



Khi đó:

- a) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(3; 4)$ .
- b) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .
- c) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- d) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Trả lời:.....

**Câu 2. (Sở Nam Định 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn  $-20 < m < 20$  và hàm số  $y = f(x^2 + 2x + m)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

Trả lời:.....

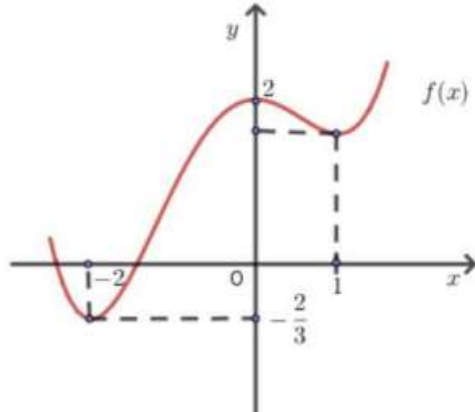
**Câu 3. (Sở Bình Phước 2023)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 16)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số  $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2023$  đồng biến trên khoảng  $(5; +\infty)$

Trả lời:.....

**Câu 4. (THPT Thị xã Quảng Trị 2023)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = |f(x-1) + 2022|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$  ?

Trả lời:.....

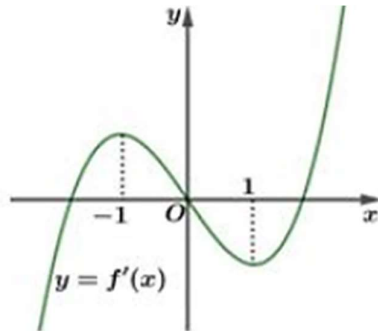
**Câu 5. (Sở Hải Phòng 2023)** Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in (-25; 20)$  để hàm số  $g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}m \cdot f^2(x) + (3m-5)f(x) - 7$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$  ?

Trả lời:.....

**Câu 6. (THPT Hai Bà Trưng – Huế - 2023)** Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |2f(\ln x) - \ln^2 x + 1 - m|$  nghịch biến trên  $(1; e)$ , biết  $f(1) = 2$  ?

Trả lời:.....

## CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

### PHẦN A. LÝ THUYẾT

#### 1) Khái niệm cực trị của hàm số

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  ( $a$  có thể là  $-\infty, b$  có thể là  $+\infty$ ) và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$ .

**Chú ý**

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ . Khi đó,  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực đại của hàm số  $f(x)$  và kí hiệu là  $f_{CD}$  hay  $y_{CD}$ . Điểm

$M_0(x_0; f(x_0))$  được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ . Khi đó,  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số  $f(x)$  và kí hiệu là  $f_{CT}$  hay  $y_{CT}$ . Điểm

$M_0(x_0; f(x_0))$  được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

**2) Cách tìm cực trị của hàm số**

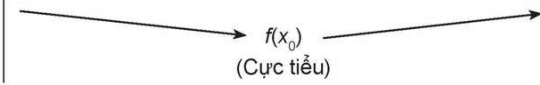
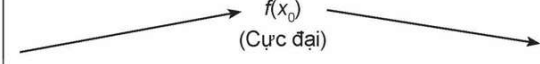
**ĐỊNH LÝ 1**

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên các khoảng  $(a; x_0)$  và  $(x_0; b)$ . Khi đó:

a) Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ .

b) Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

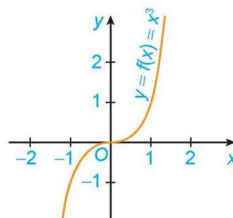
$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$			
$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

**Chú ý.**

➤ Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

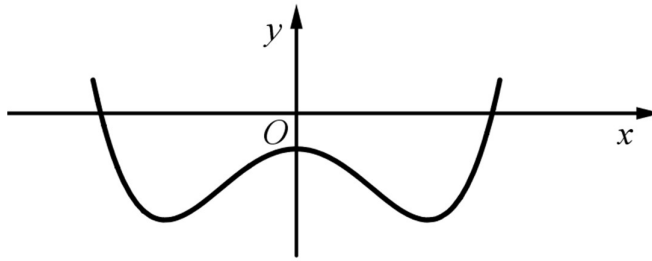
➤ Nếu  $f'(x_0) = 0$  nhưng  $f'(x)$  không đổi dấu khi  $x$  qua  $x_0$  thì  $x_0$  không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số  $f(x) = x^3$  có  $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$ , nhưng  $x = 0$  không phải là điểm cực trị của hàm số.



**ĐỊNH LÝ 2.** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp một trên  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$ ,

$y'(x_0) = f'(x_0) = 0$  và  $f'$  có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm  $x_0$





Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3                      B. 0                      C. 1                      D. 2

**Câu 5. (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$  $	$-$	$0$	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 6. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = -x^3 + 3x - 4$ .

- A.  $y_{CT} = -6$                       B.  $y_{CT} = -1$                       C.  $y_{CT} = -2$                       D.  $y_{CT} = 1$

**Câu 7. (Mã 104 - 2017)** Hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1                      B. 3                      C. 0                      D. 2

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng  $-3$                       B. Cực tiểu của hàm số bằng  $1$   
 C. Cực tiểu của hàm số bằng  $-6$                       D. Cực tiểu của hàm số bằng  $2$

**Câu 9. (Mã 110 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .

- A.  $m = -1$                       B.  $m = -7$                       C.  $m = 5$                       D.  $m = 1$

**Câu 10. (Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$

- A. không tồn tại  $m$ .                      B.  $m = \pm 1$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m \in \{1; 2\}$ .

**Câu 11. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập số thực  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3 \forall x \in \mathbb{R}$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

- A. 6                      B. 7                      C. 5                      D. 4

**Câu 12. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$  đạt cực đại tại  $x = 0$  là:

- A.  $m \in \mathbb{R}$ .                      B.  $m < 0$ .                      C. Không tồn tại  $m$ .                      D.  $m > 0$ .

**Câu 13.** Biết rằng hàm số  $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$  có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $ab \leq 0$ .                      B.  $ab < 0$ .                      C.  $ab > 0$ .                      D.  $ab \geq 0$ .

**Câu 14. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$  không có cực trị

- A.  $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$ .                      B.  $m \in (-6; 0)$ .                      C.  $m \in [-6; 0)$ .                      D.  $m \in [-6; 0]$ .

**TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$				4		-5	
							2

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-5; 2)$
- b) Hàm số có bốn điểm cực trị
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$
- d) Hàm số một cực đại

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$				3		0	
		$-\infty$					$+\infty$

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$
- b) Hàm số có ba điểm cực trị
- c) Hàm số có  $y_{CB} = 3$  và  $y_{CT} = 0$ .
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng  $2x + 2y - 4 = 0$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ , khi đó:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 3)$
- b) Hàm số có 2 điểm cực trị
- c) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3
- d) Điểm cực đại của đồ thị hàm số có tổng hoành độ và tung độ bằng 4

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Với  $m = -1$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$
- b) Với  $m = -1$  thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là  $(0; 2)$
- c) Ta có  $y' = x^2 - 2mx + m + 1$ .
- d) Để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$  đạt cực đại tại  $x = -2$  thì  $m = k$ , khi đó phương trình  $2^{x+k} = 4$  có nghiệm là  $x = 3$

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = (m-1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Khi  $m = 0$  hàm số có 3 điểm cực trị
- b) Khi  $m = 1$  đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $M(a; b)$ , khi đó  $a + b = 2$
- c) Với  $m = 2$  hàm số đạt cực đại tại  $x = -1$ .
- d) Để hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$  thì  $m = k$ , khi đó  $\log_k 8 = 2$

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Nếu  $m = 1$  thì hàm số không có cực đại

- b) Nếu  $m = 2$  thì hàm số có 1 điểm cực trị  
 c) Nếu  $m = 0$  thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $M(a;b)$  khi đó  $ab = 1$   
 d) Đồ thị hàm số  $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$  không có cực đại thì  $m \in [a;b]$  khi đó  $a + b = 3$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Khi  $m = 0$  hàm số có một điểm cực trị  
 b) Khi  $m = 1$  thì giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0  
 c) Khi  $m = \frac{1}{2}$  thì điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $M(a;b)$  khi đó  $2024^a + 2023^b = 2$   
 d) Đồ thị hàm số  $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$  có một cực trị thì  $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$  khi đó  $a + b = 3$

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Khi  $m = -2$  thì hàm số  $f(x)$  có một điểm cực trị  
 b) Khi  $m = -3$  thì hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  
 c) Khi  $m = 5$  thì hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  
 d) Tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực trị bằng 5

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Khi  $m = 1$  thì  $f(2024) < f(2023)$   
 b) Khi  $m < -3$  thì hàm số có 2 điểm cực trị  
 c) Khi  $m > 3$  thì hàm số có 2 điểm cực trị  
 d) Gọi  $S$  là tập các giá trị dương của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| \leq 5$ . Biết  $S = (a;b]$ . Khi đó  $2b - a = \frac{\sqrt{61}}{2} - 3$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

- a) Khi  $m = \frac{1}{3}$  thì hàm số có hai điểm cực trị  
 b) Với  $m \neq \frac{a}{b}$  (phân số tối giản) thì hàm số có hai điểm cực trị, khi đó  $a + b = 4$   
 c) Với  $m = 2$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 2)$   
 d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng  $y = -4x$ , khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  bằng  $\frac{2}{3}$

**TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1. (THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

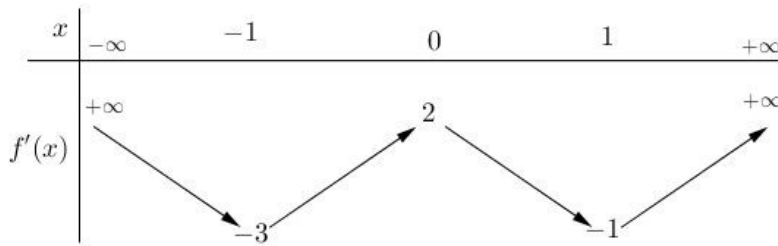
**Câu 2.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = (2m-1)x + m + 3$  song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

**Câu 3. (Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

**Câu 4. (Liên trường Nghệ An 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = 3x^4 - 4(4+m)x^3 + 12(3-m)x + 2$  có ba điểm cực trị?

**Câu 5. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tập hợp các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$  có 7 điểm cực trị

**Câu 6. (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(4x^2 + 4x)$

## GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

### PHẦN A. LÝ THUYẾT

#### 1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$ .

- Số  $M$  được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \leq M$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = M$ .

Kí hiệu  $M = \max_{x \in D} f(x)$  hoặc  $M = \max_D f(x)$ .

- Số  $m$  được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \geq m$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = m$ .

Kí hiệu  $m = \min_{x \in D} f(x)$  hoặc  $m = \min_D f(x)$ .

#### Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  (mà không nói "trên tập  $D$ ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập  $D$ , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập  $D$  để kết luận.

#### 2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử  $y = f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm trên  $(a; b)$ , có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn  $[a; b]$  mà đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$  :

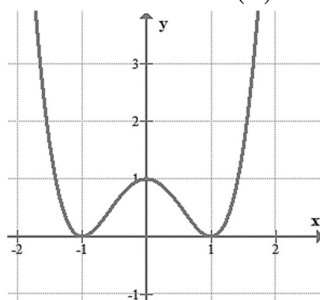
1. Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ , tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$  và  $f(b)$ .
3. Tìm số lớn nhất  $M$  và số nhỏ nhất  $m$  trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$

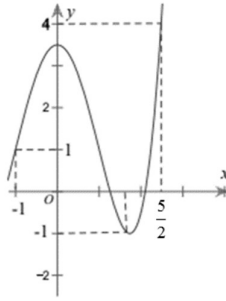
### PHẦN B. BÀI TẬP

#### TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và có đồ thị như hình vẽ.







Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x)$  trên  $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$  là:

- A.  $M = 4, m = 1$       B.  $M = 4, m = -1$       C.  $M = \frac{7}{2}, m = -1$       D.  $M = \frac{7}{2}, m = 1$

**Câu 7. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$			
$y'$		-		-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.  $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$       B.  $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$       C.  $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$       D.  $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

**Câu 8. (Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm tập giá trị của hàm số  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

- A.  $T = [1; 9]$ .      B.  $T = [2\sqrt{2}; 4]$ .      C.  $T = (1; 9)$ .      D.  $T = [0; 2\sqrt{2}]$ .

**Câu 9. (THPT Hà Huy Tập - 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2 \cos x - \frac{4}{3} \cos^3 x$  trên  $[0; \pi]$ .

- A.  $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2}{3}$ .      B.  $\max_{[0;\pi]} y = \frac{10}{3}$ .      C.  $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\max_{[0;\pi]} y = 0$ .

**Câu 10. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Tìm  $m$

- A.  $m = 4$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 3$ .

**Câu 11. (Mã 123 2017)** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[2;4]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m > 4$       B.  $3 < m \leq 4$       C.  $m < -1$       D.  $1 \leq m < 3$

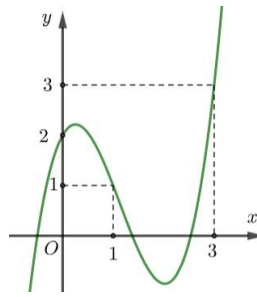
**Câu 12. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[0;1]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $1 \leq m < 3$       B.  $m > 6$       C.  $m < 1$       D.  $3 < m \leq 6$

**Câu 13. (Chuyên KHTN 2019)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  trên  $[1; 2]$  bằng 8 ( $m$  là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $m > 10$ .      B.  $8 < m < 10$ .      C.  $0 < m < 4$ .      D.  $4 < m < 8$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Trên  $[-2; 4]$ , gọi  $x_0$  là điểm mà tại đó hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$  đạt giá trị lớn nhất. Khi đó  $x_0$  thuộc khoảng nào?



- A.  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .      C.  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .      D.  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 15.** (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3$ ,  $f'(2) = -2020$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như hình sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(x + 2019) + 2020x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -2019)$ .      B.  $(0; 2)$ .      C.  $(-2019; 0)$ .      D.  $(2019; +\infty)$ .

**TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$\parallel$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$0$	$-1$	$+\infty$	

Khi đó:

- a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng  $-1$ .
- c) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .
- d) Hàm số có đúng một cực trị.

**Câu 2.** Xét hàm số  $y = f(x)$  với  $x \in [-1; 5]$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-1$	$0$	$2$	$5$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$3$	$4$	$0$	$+\infty$	

Khi đó:

- a. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn  $[-1; 5]$
- b) Hàm số đã cho đạt GTNN tại  $x = -1$  và  $x = 2$  trên đoạn  $[-1; 5]$
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; 5)$
- d) Hàm số đã cho đạt GTNN tại  $x = 0$  trên đoạn  $[-1; 5]$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như hình sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$\parallel$	$+$	$0$	$+$	$\parallel$	$-$
$y$	$+\infty$	$-3$	$2$	$-4$			

Khi đó:

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
- c) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$
- d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$ ,  $(2; +\infty)$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ , khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 37)$
- b) Hàm số có 3 điểm cực trị
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng: 12
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng: 33

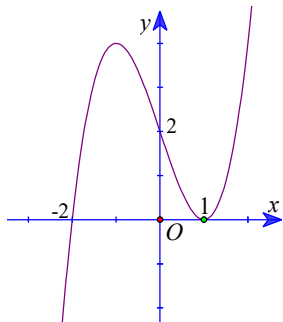
**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 24x$ , khi đó:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $A(16; -2048)$
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 24x$  trên đoạn  $[2; 19]$  bằng 6403.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 24x$  trên đoạn  $[2; 19]$  bằng -40.

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ . Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 6)$
- b) Hàm số có 3 điểm cực trị
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$  trên  $[0; 9]$  bằng -4.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$  trên  $[0; 9]$  bằng -29.

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.



- a) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  và  $(-\infty; -2)$
- b) Hàm số  $f(x)$  có 2 điểm cực trị
- c) Hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  nghịch biến trên khoảng  $(-5; -4)$
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  trên đoạn  $[-5; 3]$  bằng  $f(-2)$

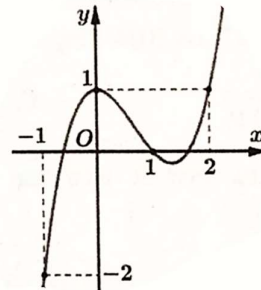
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây.

$x$	$-\infty$		0		4		$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-				
$f(x)$	$+\infty$	↘		-3	↗		5	↘		$-\infty$

- a) Hàm số  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị

- b) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 5)$   
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng  $f(1)$   
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 12

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0) \geq -1$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



- a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$   
 b) Hàm số  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị  
 c) Hàm số  $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$  có 3 điểm cực trị  
 d) Hàm số  $y = \left| f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right|$  có giá trị nhỏ nhất là  $m \in (0; 1)$  khi và chỉ khi  $-\frac{4}{3} < f(2) < \frac{1}{3}$

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x + m$  (tham số thực  $m$ ). Khi đó:

- a) Khi  $m = 0$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$   
 b) Khi  $m = 0$  thì hàm số có 2 điểm cực trị  
 c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 2]$  bằng  $m - 2$   
 d) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |f(x)|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là 1

**TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1.** (THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019) Tìm giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$  bằng 3.

Trả lời: .....

**Câu 2.** (Chuyên - Vĩnh Phúc 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 0.

Trả lời: .....

**Câu 3.** (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Nếu hàm số  $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$  có giá trị lớn nhất bằng  $2\sqrt{2}$  thì giá trị của  $m$  là

Trả lời: .....

**Câu 4.** Biết  $S$  là tập giá trị của  $m$  để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$  trên đoạn  $[0; 1]$  bằng  $-16$ . Tính tích các phần tử của  $S$ .

Trả lời: .....

**Câu 5.** (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số  $y = f(x) = m^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$ . Tính tổng tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Trả lời: .....

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$ . Xét hàm số  $g(x) = f(3x-1) + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ .

Trả lời: .....

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$ . Giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$  là

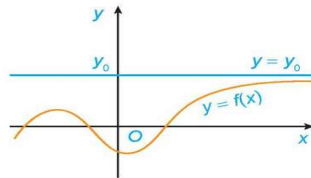
Trả lời: .....

## TIỆM CẬN

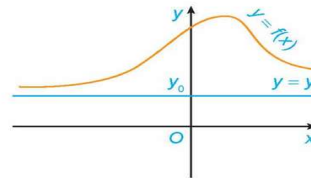
### PHẦN A. LÝ THUYẾT

#### 1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng  $y = y_0$  gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ .



Đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang của đồ thị (khi  $x \rightarrow +\infty$ ).

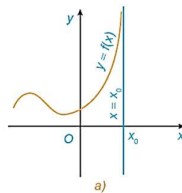


Đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang của đồ thị (khi  $x \rightarrow -\infty$ ).

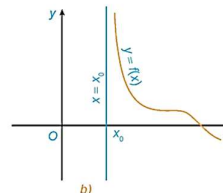
#### 2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng  $x = x_0$  gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

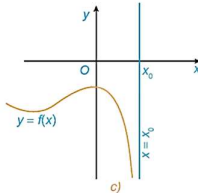
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$



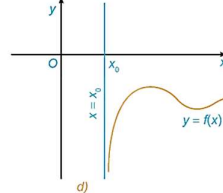
a)



b)



c)



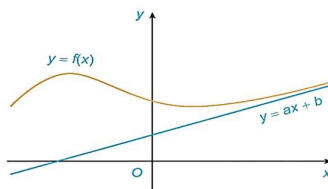
d)

a) và c). Đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị (khi  $x \rightarrow x_0^-$ ).

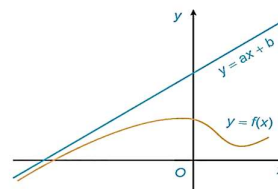
b) và d). Đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị (khi  $x \rightarrow x_0^+$ ).

#### 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng  $y = ax + b (a \neq 0)$  gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị (khi  $x \rightarrow +\infty$ ).



Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị (khi  $x \rightarrow -\infty$ ).

**Chú ý.** Ta biết rằng nếu đường thẳng  $y = ax + b (a \neq 0)$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  thì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ .

Do đó  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$ .

Từ đây suy ra  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  hoặc  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Khi đó, ta có  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$  hoặc  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

Ngược lại, với  $a$  và  $b$  xác định như trên, đường thẳng  $y = ax + b (a \neq 0)$  là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Đặc biệt, nếu  $a = 0$  thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

**PHẦN B. BÀI TẬP**

**TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1. (Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $x = 1$  và  $x = -1$ .
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 1$  và  $y = -1$ .

**Câu 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$  là

- A.  $y = -2$ .
- B.  $y = 1$ .
- C.  $x = -1$ .
- D.  $x = 2$ .

**Câu 3. (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+1}{x-1}$  là

- A.  $y = \frac{1}{4}$ .
- B.  $y = 4$ .
- C.  $y = 1$ .
- D.  $y = -1$ .

**Câu 4. (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{5x+1}{x-1}$  là

- A.  $y = 1$ .
- B.  $y = \frac{1}{5}$ .
- C.  $y = -1$ .
- D.  $y = 5$ .

**Câu 5. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  là:

- A.  $y = \frac{1}{2}$ .
- B.  $y = -1$ .
- C.  $y = 1$ .
- D.  $y = 2$ .

**Câu 6. (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$y'$	-		-	+
$y$	1		2	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 1.

**Câu 7. (Mã 102 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	-		0	+
$y$	0		2	+

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 3.

**Câu 8.** Hàm số nào sau đây có một tiệm cận:

- A.  $y = \frac{x+3}{2x-1}$                       B.  $y = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$                       C.  $y = \frac{4}{x-1}$                       D.  $y = \frac{2x}{x^2+1}$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$  (C). Khoảng cách từ  $M(2; -1)$  đến tiệm cận xiên của đồ thị (C) là:

- A.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$                       B.  $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$                       C. 2                      D. 4

**Câu 10.** Với giá trị nào của  $m$  thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = x + m + \frac{3}{m-x}$  đi qua điểm  $M(1; 2)$ .

- A.  $m = 1$                       B.  $m = 0$                       C.  $m = 2$                       D. Một đáp án khác.

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có đồ thị là (C),  $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ . Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ  $M_0$  đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 2.                      B. 4.                      C. 1.                      D. 0.

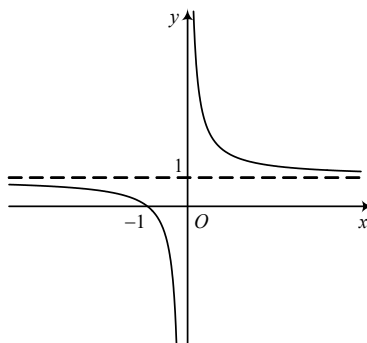
**Câu 12.** (Sở Vĩnh Phúc 2022) Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$  có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 0.

**P**

**TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**Câu 1.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x=0$ , tiệm cận ngang  $y=1$ .
- b) Hàm số có hai cực trị.
- c) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
- d) Hàm số nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(0; +\infty)$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến như sau:

$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
$y'$		+	+	+
$y$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $y = 0$  là tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = -3$  là tiệm cận đứng.
- c) Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 4.
- d) Hàm số đồng biến trong khoảng  $(-\infty; +\infty)$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$ .

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có hai tiệm cận.
- b) Giao điểm của hai tiệm cận là  $I(-2; -6)$ .
- c) Khoảng cách từ  $O$  đến tiệm cận xiên bằng  $4\sqrt{2}$ .
- d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm  $M(0; -4)$ .

**Câu 4.** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3-m)x + m^2 - 2}{x - 1}$ ,  $m$  là tham số. Khi  $(C)$  có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là  $(d)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khi  $m = 2$  thì  $(d)$  có phương trình là  $y = 2x + 3$
- b) Khi  $m = 1$  thì  $(d)$  đi qua điểm  $A(1; 4)$ .
- c) Có 1 đường thẳng  $(d)$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
- d) Khi  $m = \pm\sqrt{3}$  thì khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến  $(d)$  bằng  $\sqrt{3}$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2 - 8x + m}$ ,  $m$  là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang
- b) Khi  $m < 16$  thì đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận
- c) Khi  $m = 16$  thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng
- d) Có 14 giá trị nguyên dương của  $m$  để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-2}$  có đồ thị là  $(C)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Chỉ có 2 điểm nằm trên  $(C)$  cách đều hai trục tọa độ
- b) Chỉ có 2 điểm  $M$  nằm trên  $(C)$ , sao cho tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.
- c) Tìm được hai điểm  $A, B$  nằm về hai nhánh của  $(C)$  sao cho  $AB$  nhỏ nhất, khi đó tổng hoành độ của hai điểm  $A, B$  bằng 4
- d) Có 4 điểm  $M$  thuộc  $(C)$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$  bằng  $\frac{12}{5}$ .

**TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1. (Chuyên Bắc Giang - 2021)** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x}$  là ?

**Trả lời :** .....

**Câu 2.** Tìm tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m+1)x - m + 2}{x + 1}$  có tiệm cận xiên là  $(d)$  và  $(d)$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $I(1; 2)$ , bán kính bằng  $\sqrt{2}$ .

**Trả lời :** .....

**Câu 3.** (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2020; 2020]$  để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

**Câu 4.** Cho đường cong  $(C_m): y = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2}{mx-1}$  và đường thẳng  $(d_m): y = mx - m + 2$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $(C_m)$  có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên của nó tạo với đường thẳng  $(d_m)$  một góc  $45^\circ$ .

Trả lời : .....

**Câu 5.** (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ . Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{f(x)+2}$  có duy nhất một tiệm cận ngang.

Trả lời : .....

**Câu 6.** (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x)-1}$  là?

### KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

#### PHẦN A. LÝ THUYẾT

##### 1. Sơ đồ khảo sát hàm số

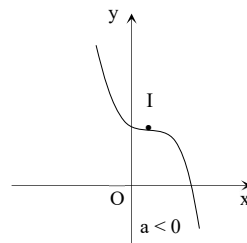
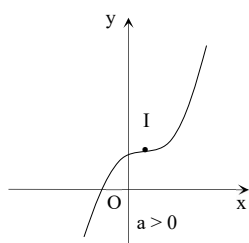
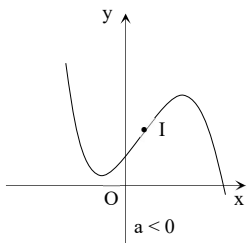
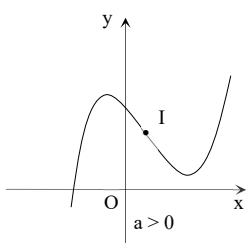
Sơ đồ khảo sát hàm số  $y = f(x)$ :

Các bước khảo sát hàm đa thức	Các bước khảo sát hàm hữu tỷ
<ul style="list-style-type: none"> <li>☒ Tập xác định</li> <li>☒ Tìm <math>y'</math> &amp; sự biến thiên, cực trị</li> <li>☒ Giới hạn <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = ..</math>; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = ..</math></li> <li>☒ Bảng biến thiên</li> <li>☒ Giá trị đặc biệt ( có tọa độ điểm uốn khi khảo sát hàm số bậc 3 để chính xác hóa đồ thị)</li> <li>☒ Đồ thị</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>☒ Tập xác định</li> <li>☒ Tìm <math>y'</math> &amp; sự biến thiên, cực trị</li> <li>☒ Giới hạn &amp; tiệm cận ( đứng + ngang; đứng + xiên)</li> <li>☒ Bảng biến thiên</li> <li>☒ Giá trị đặc biệt ( giao điểm với Ox, Oy, điểm cực trị..)</li> <li>☒ Đồ thị</li> </ul>

**Chú ý.** Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

##### 2. Các dạng đồ thị hàm số:

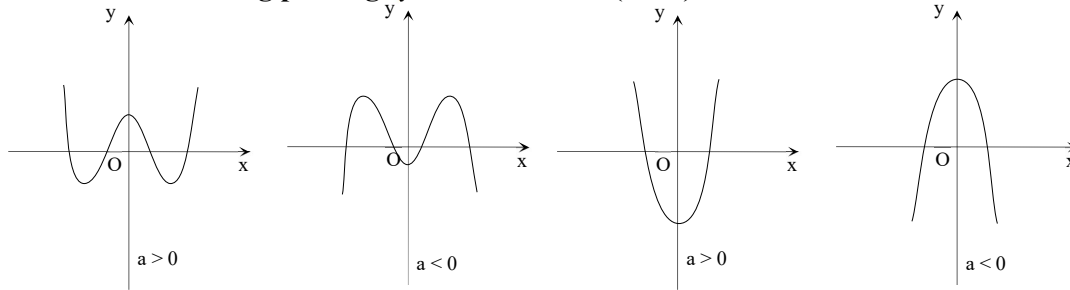
☛ **Hàm số bậc 3:**  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) ( chỉ nêu 4/6 dạng đồ thị)



Dạng 1: hàm số có 2 cực trị  $\Leftrightarrow ?$

Dạng 2: hàm số không có cực trị

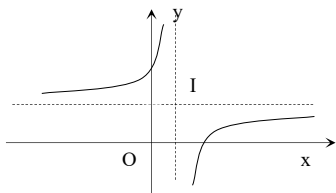
☞ **Hàm số trùng phương:  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ )**



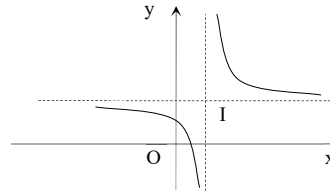
Dạng 1: hàm số có 3 cực trị  $\Leftrightarrow ?$

Dạng 2: hàm số có 1 cực trị  $\Leftrightarrow ?$

☞ **Hàm số nhất biến:  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $ad - bc \neq 0$ )**



Dạng 1: hsố đồng biến

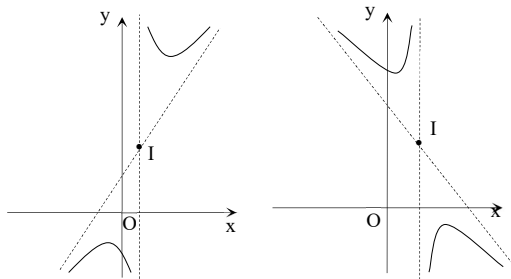


Dạng 2: hsố nghịch biến

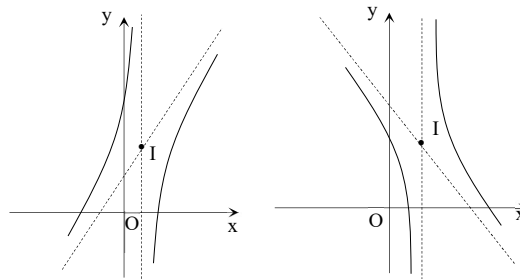
**Chú ý.** Đồ thị của hàm số phân thức  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ ):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

☞ **Hàm số hữu tỷ (2/1):  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$  (tử, mẫu không có nghiệm chung, ...)**



Dạng 1: hàm số có cực trị



Dạng 2: hàm số không có cực trị

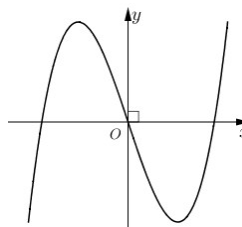
**Chú ý.** Đồ thị của hàm số phân thức  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$  ( $a \neq 0, p \neq 0$ , đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

**PHẦN B. BÀI TẬP**

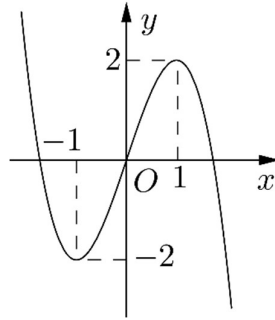
**TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



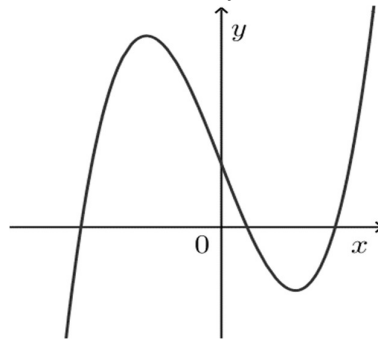
- A.  $y = x^3 - 3x$ .      B.  $y = -x^3 + 3x$ .      C.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .      D.  $y = -x^3 + 3x^2$ .

**Câu 2. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 1$  là



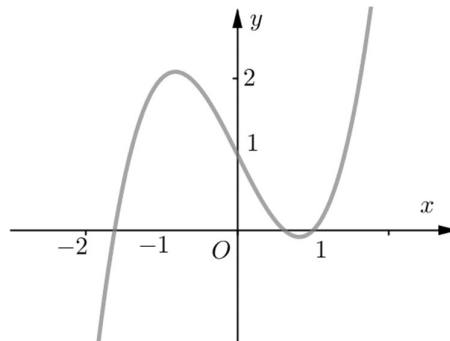
- A. 1.      B. 0.      C. 2.      D. 3.

**Câu 3. (Đề Minh Họa 2017)** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.  $y = x^3 - 3x + 1$       B.  $y = -x^3 + 3x + 1$   
 C.  $y = x^2 - x^2 + 1$       D.  $y = -x^2 + x - 1$

**Câu 4. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



- A.  $y = x^3 + 2x + 1$ .      B.  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ .      C.  $y = x^3 - 2x + 1$ .      D.  $y = -x^3 + 2x + 1$ .

**Câu 5. (Mã 102 - 2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

$x$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

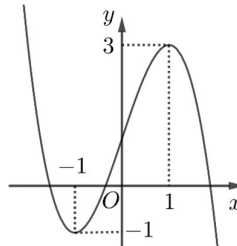
- A.  $y = -x^3 + 3x$ .      B.  $y = x^3 - 3x$ .      C.  $y = -x^2 + 2x$ .      D.  $y = x^2 - 2x$ .

**Câu 6. (Mã 103 - 2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		$-1$		$1$		$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$+\infty$		$-2$		$2$		$-\infty$

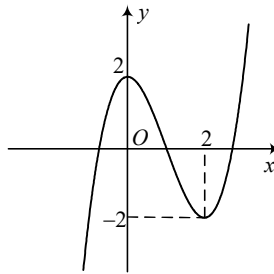
- A.  $y = x^3 - 3x$ .      B.  $y = -x^3 + 3x$ .      C.  $y = x^2 - 2x$ .      D.  $y = -x^2 + 2x$ .

**Câu 7. (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 1$  là



- A. 0.      B. 3.      C. 1.      D. 2.

**Câu 8. (Mã 101 2018)** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ). Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình  $3f(x) + 4 = 0$  là



- A. 2      B. 0      C. 1      D. 3

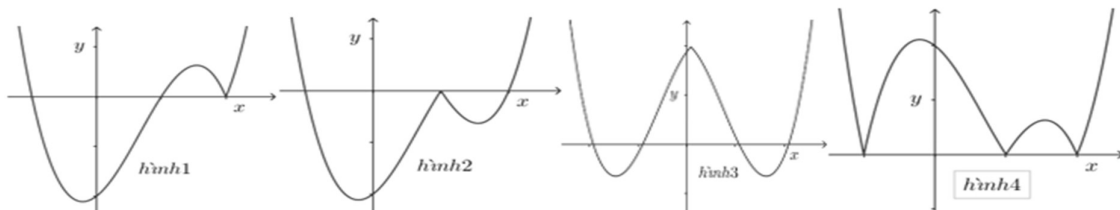
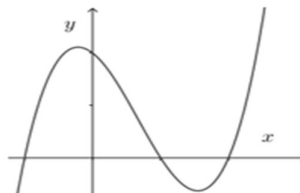
**Câu 9. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2$  và đồ thị hàm số  $y = x^2 + 5x$

- A. 3.      B. 0.      C. 1.      D. 2.

**Câu 10. (Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng  $y = -2x + 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + x + 2$  tại điểm duy nhất; kí hiệu  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm đó. Tìm  $y_0$

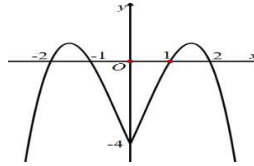
- A.  $y_0 = 4$       B.  $y_0 = 0$       C.  $y_0 = 2$       D.  $y_0 = -1$

**Câu 11. (Đề Tham Khảo 2017)** Hàm số  $y = (x - 2)(x^2 - 1)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = |x - 2|(x^2 - 1)$ ?



- A. Hình 1      B. Hình 2      C. Hình 3      D. Hình 4

**Câu 12. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A.  $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

B.  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

C.  $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$

D.  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ .

**Câu 13.** Biết phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số  $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

**Câu 14. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  (C) cắt đường thẳng  $d: y = m(x-1)$  tại ba điểm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$ .

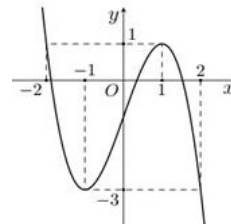
A.  $m > -2$ .

B.  $m = -2$ .

C.  $m > -3$ .

D.  $m = -3$ .

**Câu 15. (Sở Bình Thuận 2023)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0$  có đúng ba nghiệm  $x \in [0; +\infty)$

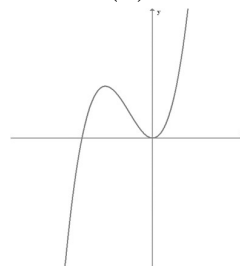
A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4

**Câu 16. (Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$  có nghiệm?

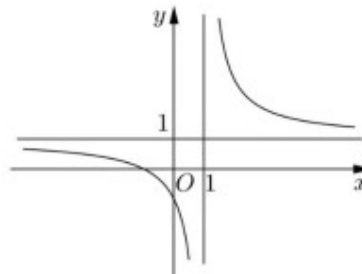
A. 2.

B. 3.

C. 4.

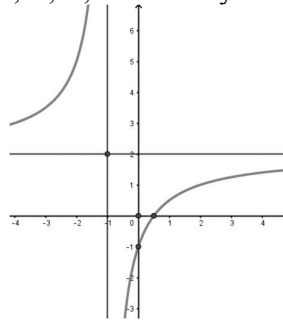
D. 1.

**Câu 17. (Đề Tham Khảo 2019)** Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



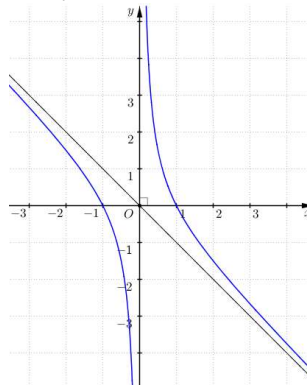
- A.  $y = \frac{2x-1}{x-1}$       B.  $y = \frac{x+1}{x-1}$       C.  $y = 2x^3 + x^2 + 1$       D.
- $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$

**Câu 18.** (Đề Tham Khảo 2017) Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



- A.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$       B.  $y = \frac{2x+3}{x+1}$       C.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$       D.  $y = \frac{2x-2}{x-1}$

**Câu 19.** Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.  $y = \frac{-x^2+1}{x}$       B.  $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$       C.  $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$       D.  $y = x^3 - 3x^2$

**Câu 20.** Gọi  $M$ ,  $N$  là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  và đường thẳng  $d: y = x+2$ .

Hoành độ trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$  là

- A.  $-\frac{5}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C. 1.      D.  $\frac{1}{2}$

**Câu 21.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Khi đó diện tích tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ bằng)

- A. 1.      B.  $\frac{1}{4}$       C. 2.      D.  $\frac{1}{2}$

**Câu 22.** Đường thẳng  $y = 2x - 1$  có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ ?

- A. 2.      B. 3.      C. 1.      D. 0.

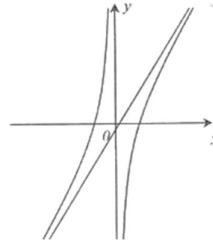
**Câu 23.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$  có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) của hàm số có tọa độ là các số nguyên. Chọn câu trả lời đúng.

- A. 2.      B. 4.      C. 6.      D. 0.

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = \frac{-2x^2 - mx + 2m}{x-1}$ . Tìm hoành độ của điểm cực đại, biết tiệm cận xiên qua điểm  $(-3;3)$ . Chọn câu trả lời đúng.

- A.  $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $x = 2 - \sqrt{2}$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = ax + b - \frac{r}{x}$  ( $abr \neq 0$ ) và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Các hệ số  $a, b, r$  phải thỏa mãn điều kiện nào dưới đây.

- A.  $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r < 0 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$

### TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - x - 5$  có đồ thị là (C). Khi đó

- a) Đồ thị (C) có một điểm uốn.  
 b) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.  
 c) Đồ thị hàm số luôn có giao điểm với  $Ox$ .  
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ , trong đó  $m$  là tham số.

- a) Khi  $m = 0$  thì đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm  $(0;4)$   
 a) Khi  $m = 0$  thì đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm  $(1;-2)$ .  
 c) Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  thì  $m \leq 0$   
 d) Để đồ thị hàm số đã cho cắt  $Ox$  tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng thì  $m = k$  khi đó  $k$  là số lẻ

**Câu 3.** Cho hàm số :  $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$  có đồ thị là (C).

- a) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  
 b) Điểm đối xứng của đồ thị có tọa độ là  $(1;-2)$   
 c) Trên đoạn  $[4;8]$  thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại  $x = 4$   
 d) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm  $A\left(0; -\frac{7}{3}\right)$

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$  (1).

- a) Khi  $m = 1$  đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm phân biệt  
 b) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm  $A(0;1)$   
 c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng  $y = 9x - 3$  đi qua điểm  $B(1;5)$   
 d) Có 1 giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn  $\frac{1}{6}$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$  có đồ thị (C).

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2, -1); (-1, 0)$ .
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị (C) không cắt trục  $Ox$ .
- d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm  $A(1; 2)$

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$  có đồ thị là (C).

- a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là  $y = -x - 6$ .
- b) Đồ thị (C) nhận giao điểm  $I(3; -9)$  làm tâm đối xứng.
- c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với  $Oy$ .
- d) Đồ thị không cắt trục  $Ox$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$  (1), với  $m$  là số thực.

- a) Khi  $m = 1$  đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị
- b) Khi  $m = 1$  đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là  $y = x - 2$
- c) Khi  $m = 1$  giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là  $I(3; -5)$
- d) Có 2 giá trị  $m$  để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng  $45^\circ$

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$  có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số.

- a) Khi  $m = 2$  thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 1$
- b) Khi  $m = 2$  thì giao điểm các đường tiệm cận có tọa độ là  $I(1; -1)$
- c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm  $A(-1; \sqrt{2})$  thì  $m = 2$
- d) Với mọi giá trị của tham số  $m$ , hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = x - \frac{1}{x + 1}$

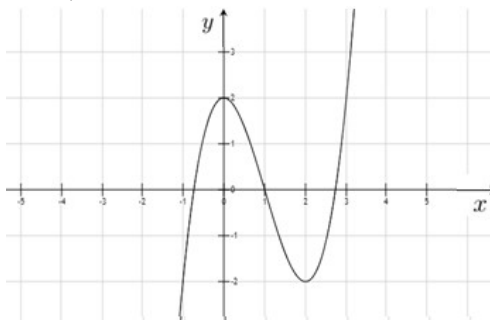
- a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là  $x = 1$
- b) Đồ thị hàm số cắt trục  $Oy$  tại  $M$ . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại  $M$  là  $y = 2x - 1$
- c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau
- d) Để đường thẳng  $y = k$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  sao cho  $OA \perp OB$  khi đó  $k$  là nghiệm của phương trình  $k^2 - k - 1 = 0$

**TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1.** (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Ta xác định được các số  $a, b, c$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  đi qua điểm  $(1; 0)$  và có điểm cực trị  $(-2; 0)$ . Tính giá trị biểu thức  $T = a^2 + b^2 + c^2$ .

Trả lời: .....

**Câu 2.** (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.



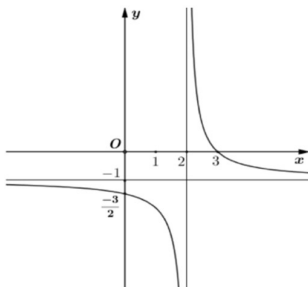
Tính  $S = a + b$ ?

Trả lời: .....

**Câu 3. (Sở Ninh Bình 2020)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

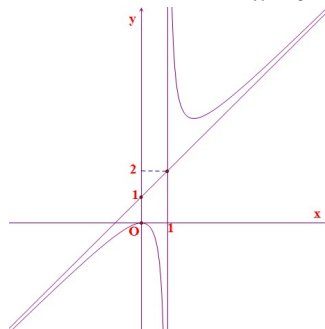
Trả lời: .....

**Câu 4. (SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số  $y = \frac{ax+3}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của  $a - 2c$ .



Trả lời: .....

**Câu 5.** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số  $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$



Khi đó tổng  $a + b + c$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 6. (Chuyên Nguyễn Du Đắk Lắk 2019)** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  ( $C$ ) và đường thẳng  $d: y = -x + m$ . Gọi  $S$  là tập các số thực  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt đồ thị ( $C$ ) tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng  $2\sqrt{2}$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2}$  (1).

Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng  $\Delta: 2x + y + 1 = 0$ .

Trả lời: .....

**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ**

**1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG**

Giả sử  $y$  là một hàm số của  $x$  và ta viết  $y = f(x)$ . Nếu  $x$  thay đổi từ  $x_1$  đến  $x_2$ , thì sự thay đổi của  $x$  là  $\Delta x = x_2 - x_1$ , và sự thay đổi tương ứng của  $y$  là  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ .

Tỉ số  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của  $y$  đối với  $x$  trên đoạn  $[x_1; x_2]$ .

Giới hạn  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của  $y$  đối với  $x$  tại điểm  $x = x_1$ .

Như vậy, đạo hàm  $f'(a)$  là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng  $y = f(x)$  đối với  $x$  tại điểm  $x = a$ . Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu  $s = s(t)$  là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì  $v = s'(t)$  biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:  $a(t) = v'(t) = s''(t)$ .

- Nếu  $C = C(t)$  là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm  $t$ , thì  $C'(t)$  là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm  $t$ .

- Nếu  $P = P(t)$  là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm  $t$ , thì  $P'(t)$  biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm  $t$ .

- Nếu  $C = C(x)$  là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất  $x$  đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời  $C'(x)$  của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên  $C'(x)$  xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ  $x+1$  (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

## PHẦN B. BÀI TẬP

### TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

**Câu 1.** Một chất điểm chuyển động có phương trình  $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ , trong đó  $t$  được tính bằng giây và  $S$  được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:

- A.  $-9m/s^2$ .      B.  $9m/s^2$ .      C.  $-12m/s^2$ .      D.  $12m/s^2$

**Câu 2.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.  $89(m/s)$ .      B.  $71(m/s)$ .      C.  $109(m/s)$ .      D.  $\frac{25}{3}(m/s)$ .

**Câu 3.** Bác Tô có một cái ao có diện tích  $50m^2$  để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ  $20\text{ con}/m^2$  và thu được tất cả  $1,5$  tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi  $8\text{ con}/m^2$  thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm  $0,5\text{ kg}$ . Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

- A. 1100 con.      B. 1000 con.      C. 500 con.      D. 502 con.

### TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}).$$

- a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.  
 b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.  
 c) Xem  $f$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Vậy hàm số đồng biến trên  $[0; +\infty)$ .  
 d) Đạo hàm của hàm số  $f$  biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

**Câu 2.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t} \quad (N(t) \text{ được tính bằng triệu người, } 0 \leq t \leq 50)$$

- a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)
- b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)
- c) Xem  $N(t)$  là hàm số của biến số  $t$  xác định trên đoạn  $[0; 50]$ . Khi đó hàm số  $N(t)$  đồng biến trên đoạn  $[0; 50]$ .
- d) Đạo hàm của hàm số  $N(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

**Câu 3.** Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm  $t$  (giây) là  $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$ .

- a) Hàm vận tốc là:  $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$
- b) Hạt chuyển động xuống dưới khi  $t > 2$
- c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian  $0 \leq t \leq 3$  là  $9m$
- d) Khi  $t > 0$  thì hạt tăng tốc

**Câu 4.** Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

- a) Gọi  $p$  (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi,  $x$  là số ti vi. Vậy hàm cầu là:  $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$
- b) Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất
- c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là  $C(x) = 12000 - 3x$  (triệu đồng), trong đó  $x$  là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.
- d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là  $C(x) = 12000 - 3x$  (triệu đồng), trong đó  $x$  là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

### TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$  trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

**Trả lời:**.....

**Câu 2.** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là  $s(t) (km)$  là hàm phụ thuộc theo biến  $t$  (giây) tuân theo biểu thức sau:  $s(t) = e^{t+3} + 2te^{3t+1} (km)$ . Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

**Trả lời:**.....

**Câu 3.** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

**Trả lời:**.....

**Câu 4.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:  $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$  (con), trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

**Trả lời:**.....

**Câu 5.** Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức  $V = k(R - r)r^2; 0 \leq r < R$ , trong đó  $k$  là hằng số,  $R$  là bán kính bình thường của khí quản,  $r$  là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của

khí quản khí ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Trả lời:.....

**Câu 6.** Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Trả lời:.....

## CHUYÊN ĐỀ 2 VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

### 1. Khái niệm vectơ trong không gian

**Vectơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

**Chú ý:** Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng  $\overline{AB}$  trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  thì ta có một vectơ, kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$
- Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overline{AB}|$ , độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



*Đường thẳng  $d$  là giá của vectơ  $\vec{a}$*

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

**Chú ý:** Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

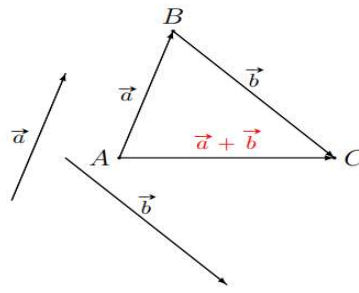
- Trong không gian, với mỗi điểm  $O$  và vectơ  $\vec{a}$  cho trước, có duy nhất điểm sao cho  $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ .
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như  $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$  được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là  $\vec{0}$ .

### 2. Các phép toán vectơ trong không gian

#### a. Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là **tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$** , kí hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ . Vậy  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.

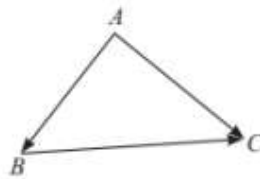


**Chú ý:** Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

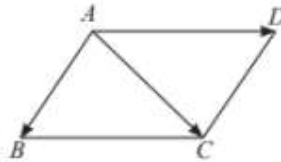
- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .
- Tính chất của vector-không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

Đối với vector trong không gian, ta có các quy tắc sau:

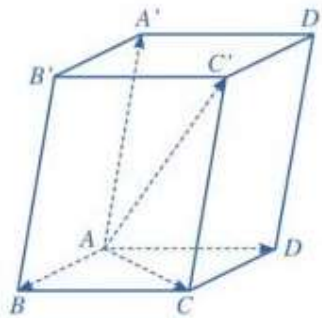
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm  $A, B, C$  ta luôn có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu  $ABCD$  là hình bình hành, ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .



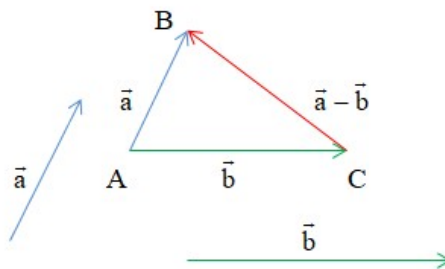
- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



### b. Hiệu của hai vector

Trong không gian, cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Hiệu của vector  $\vec{a}$  và vector  $\vec{b}$  là tổng vector  $\vec{a}$  và vector đối của vector  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Phép lấy hiệu hai vector còn được gọi là **phép trừ vector**.



**Chú ý:** Trong không gian, với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .



### 3. Tích của một số với một vector trong không gian

#### a. Định nghĩa:

Cho số  $k \neq 0$  và một vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của vector  $\vec{a}$  với số  $k$  là một vector, kí hiệu  $k\vec{a}$ .

Vector  $k\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là **phép nhân một số với một vector**.

Quy ước:  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

#### b. Tính chất:

Với hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  bất kỳ, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

$$\bullet k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$$

$$\bullet (h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$\bullet h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$\bullet 1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

#### Chú ý:

• Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

• Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 sao cho  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

• **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  tùy ý, ta có:

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}; \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}.$$

• **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ,  $M$  tùy ý, ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}; \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

• **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  tùy ý. Ta có:

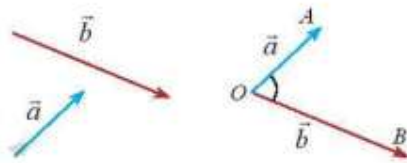
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}; \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$$

### 4. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

#### a. Góc giữa hai vector

Trong không gian, cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

Góc cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong không gian, kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b})$ , là góc giữa hai vector  $\vec{OA}, \vec{OB}$ .



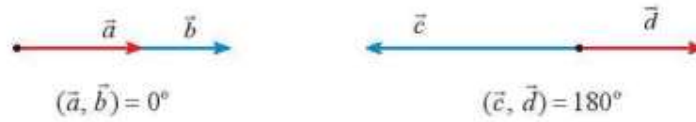
#### Chú ý:

$$\bullet 0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$$

• Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

• Góc giữa hai vector cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0^\circ$ .

• Góc giữa hai vector ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .



**b. Tích vô hướng của hai vectơ**

Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . **Tích vô hướng** của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số thực, kí hiệu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

**Chú ý:**

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

- Tính chất của tích vô hướng: Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

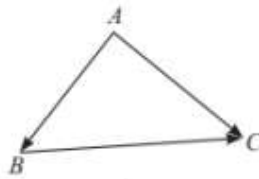
$$\begin{aligned}
 &+ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} && \text{(tính chất giao hoán)} \\
 &+ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} && \text{(tính chất phân phối)} \\
 &+ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})
 \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

**CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**

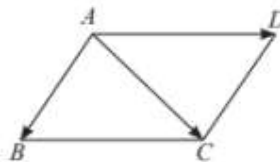
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm  $A, B, C$  ta luôn có:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



- với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ .



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu  $ABCD$  là hình bình hành, ta có:  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .



- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , ta có:  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$



C.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$

D.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$

**Câu 7.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ .

B.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{0}$ .

C.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ .

D.  $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$ .

**Câu 8.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  với tâm  $O$ . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{0}$

D.  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

**Câu 9.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Chọn đẳng thức **sai**?

A.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$ .

B.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$ .

C.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$ .

D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$ . Đặt  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$ , trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{0}$ .

B.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ .

C.  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{0}$ .

D.  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 11.** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$  của tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn  $MN$  và  $P$  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{IA} + (2k - 1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$

A.  $k = 2$ .

B.  $k = 4$ .

C.  $k = 1$ .

D.  $k = 0$ .

**Câu 12.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$

A.  $k = \frac{1}{3}$ .

B.  $k = 2$ .

C.  $k = 3$ .

D.  $k = \frac{1}{2}$ .

**Câu 13.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \overrightarrow{0}$ .

A.  $k = 0$ .

B.  $k = 1$ .

C.  $k = 4$ .

D.  $k = 2$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 14.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$

B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$ .

**Câu 15.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$

B.  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$

C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{0}$ .

D.  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$ .

**Câu 16.** Hãy nhận xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$ .

B. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

C. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Nếu có  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$  thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

D. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 17.** Trong mặt phẳng cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ .

A. Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ .

B. Nếu  $ABCD$  là hình thang thì  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$

C. Nếu  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.

D. Nếu  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$  thì  $ABCD$  là hình thang.

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Đặt  $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ ;  $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ ;  $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$ .

A.  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$ .

B.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ .

C.  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ .

D.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

A. Nếu  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$  thì  $ABCD$  là hình thang.

B. Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ .

C. Nếu  $ABCD$  là hình thang thì  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ .

D. Nếu  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.

**Câu 20.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ .

A. Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ .

B. Nếu  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.

C. Nếu  $ABCD$  là hình thang thì  $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$ .

D. Nếu  $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$  thì  $ABCD$  là hình thang.

**Câu 21.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với tâm  $O$ .

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$ .

B.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.**

**Câu 22.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

**Câu 23.** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$  của tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn  $MN$  và  $P$  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ .

**Câu 24.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

**Câu 25.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

**Câu 26.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$

## BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTO TRONG KHÔNG GIAN

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

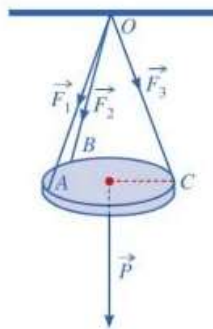
**Câu 27.** Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vector  $\vec{a}$  phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vector  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ .



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Vector  $\vec{d}$  ngược hướng với vector  $\vec{a}$ .
- B. Các vector  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$  cùng phương và ngược chiều với vector  $\vec{a}$ .
- C. Vector  $\vec{b}$  với vector  $\vec{a}$  đối nhau.
- D. Các vector  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$  đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

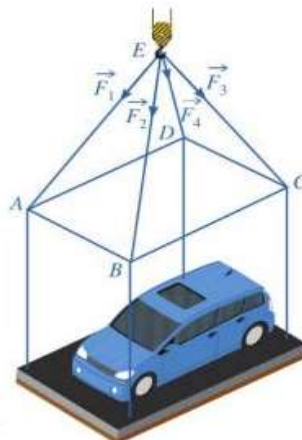
**Câu 28.** Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$  (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng  $P$  của tấm gỗ tròn đó.

- A.  $30\sqrt{3}$ .
- B. 10.
- C.  $10\sqrt{2}$ .
- D.  $10\sqrt{3}$ .

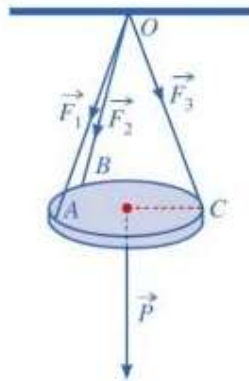
**Câu 29.** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $60^\circ$  như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ  $5000(N)$  và trọng lượng khung sắt là  $2000(N)$ . Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



- A.  $15321(N)$ .
- B.  $6660(N)$ .
- C.  $5000(N)$ .
- D.  $10000(N)$ .

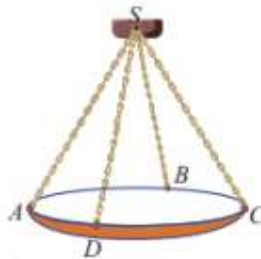
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.**

**Câu 30.** Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ . Biết trọng lượng  $P$  của tấm sắt tròn đó bằng  $2024\sqrt{3}(N)$  (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

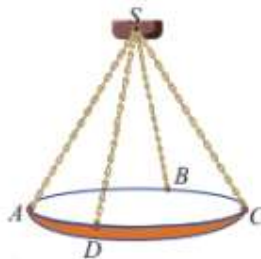
**Câu 31.** Một chiếc đèn chùm có khối lượng  $m = 10(kg)$  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 45^\circ$  (xem hình vẽ).



a) Sử dụng công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10(m/s^2)$ , tìm độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm.

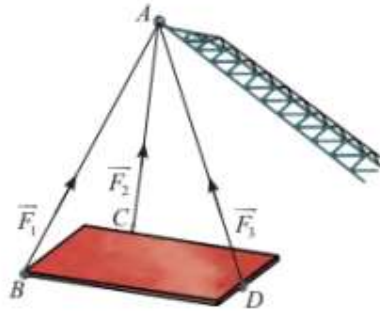
b) Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.

**Câu 32.** Một chiếc đèn chùm được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SA = SB = SC = SD$  và  $ABCD$  là hình vuông, đồng thời các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc có  $60^\circ$  (xem hình vẽ).

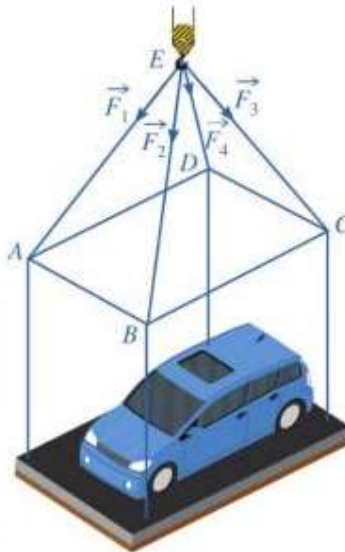


Biết độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp  $4(N)$ . Tìm độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm.

**Câu 33.** Một chiếc cầu cầu, cầu tấm kim loại có trọng lực  $2000(N)$ , được thiết kế với tấm kim loại được giữ bởi ba đoạn cáp  $AB, AC, AD$  sao cho  $AB = AC = AD$  và  $BCD$  là tam giác đều, đồng thời các cạnh  $AB, AC, AD$  tạo với mặt phẳng  $(BCD)$  một góc có  $30^\circ$  (xem hình vẽ). Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.



**Câu 34.** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $45^\circ$  như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$ , trọng lượng khung sắt là  $1000(N)$  và trọng lượng của chiếc xe ô tô  $4000(N)$ . Tính cường độ lực căng của các đoạn dây cáp.



**CHUYÊN ĐỀ 3. ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ I**

**ĐỀ 1:**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$4$	$-1$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .      B.  $(0; 1)$ .      C.  $(-1; 1)$ .      D.  $(-1; 0)$

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$     B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$   
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$     D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$2$	$-\infty$	$4$	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

- A.  $(-1; 1)$ .    B.  $(0; 1)$ .    C.  $(4; +\infty)$ .    D.  $(-\infty; 2)$ .

**Câu 4.** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

- A.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$     B.  $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$     C.  $y = x^2 - 2x + 1$     D.  $y = -x^3 + x + 1$

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3$	$-2$	$+\infty$		

Hàm số đạt cực đại tại:

- A.  $x = -2$ .    B.  $x = 3$ .    C.  $x = 1$ .    D.  $(1; 3)$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn  $[-1; 3]$  như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

$x$	$-1$	$0$	$2$	$3$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$0$	$5$	$1$	$4$		

- A.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$ .    B.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$ .    C.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$ .    D.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$ .

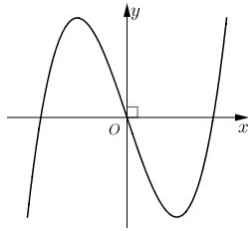
**Câu 7.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x - 2}{x + 1}$  là

- A.  $y = -2$ .    B.  $y = 1$ .    C.  $x = -1$ .    D.  $x = 2$ .

**Câu 8.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 2}{x - 1}$  là

- A.  $x = 2$ .    B.  $x = -2$ .    C.  $x = 1$ .    D.  $x = -1$ .

**Câu 9.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A.  $y = x^3 - 3x$ .      B.  $y = -x^3 + 3x$ .      C.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .      D.  $y = -x^3 + 3x^2$ .

**Câu 10.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = \overline{AC'}$ .      B.  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ .  
 C.  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .      D.  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;1;-2)$  và  $B(2;2;1)$ . Vector  $\overline{AB}$  có tọa độ là

- A.  $(-1;-1;-3)$       B.  $(3;1;1)$       C.  $(1;1;3)$       D.  $(3;3;-1)$

**Câu 12.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A.  $\overline{BC} + \overline{AB} = \overline{DA} - \overline{DC}$ .      B.  $\overline{AC} - \overline{AD} = \overline{BD} - \overline{BC}$ .  
 C.  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{DB} - \overline{DC}$ .      D.  $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{CD} + \overline{BC}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

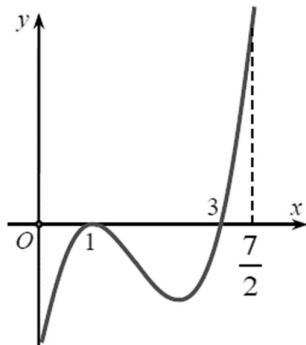
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		$-2$		$2$		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	$-\infty$		3		0		$+\infty$

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$   
 b) Hàm số có ba điểm cực trị  
 c) Hàm số có  $y_{CD} = 3$  và  $y_{CT} = 0$ .  
 d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng  $2x + 2y - 4 = 0$

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



- a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $\left(3; \frac{7}{2}\right)$   
 b)  $f(0) > f(3)$   
 c)  $f(3) > f\left(\frac{7}{2}\right)$

d) Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  tại điểm  $x_0 = \frac{7}{2}$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến như sau:

$x$	$-\infty$		$-3$		$3$		$+\infty$
$y'$		+		+		+	
$y$		$0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $y = 0$  là tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = -3$  là tiệm cận đứng.
- Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 4.
- Hàm số đồng biến trong khoảng  $(-\infty; +\infty)$

**Câu 4.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

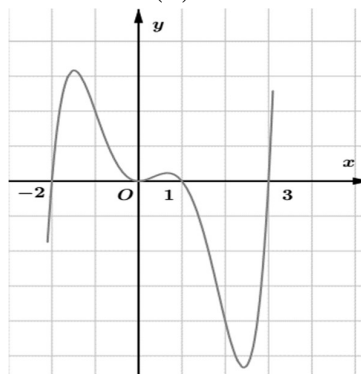
- $\overline{BD} - \overline{D'D} - \overline{B'D'} = \overline{BB'}$ .
- $\overline{AC} - \overline{BA'} + \overline{DB} + \overline{C'D} = \overline{0}$ .
- $\overline{AC} + \overline{BA'} + \overline{DB} + \overline{C'D} = \overline{0}$ .
- $\overline{AB} + \overline{B'C'} + \overline{DD'} = \overline{AC'}$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+4}{2x-m}$  nghịch biến trên khoảng  $(-3; 4)$ .

**Câu 2.** Tìm giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$  bằng 3.

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau.

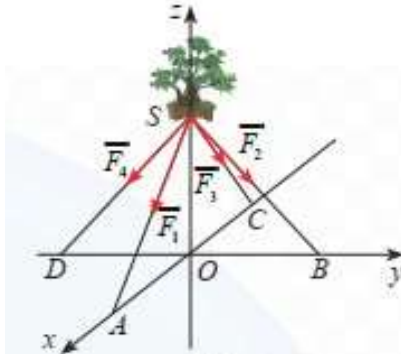


Hàm số  $g(x) = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**Câu 4.** Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$  trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ, các hằng số  $a, b \in \mathbb{R}$ , đồng thời đạo hàm  $P'(t)$  biểu thị tốc độ gia tăng tế bào. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 10 tế bào/giờ. Khi đó  $a = \dots$  và  $b = \dots$

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Tìm được tọa độ điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn đẳng thức  $\overline{AM} = 2\overline{MB}$ . Khi đó  $a + b + c = ?$

**Câu 6.** Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0;0;30)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(30;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn  $60N$  và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Tính  $|\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + 3\vec{F}_3 + 4\vec{F}_4|$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



**ĐỀ SỐ 2**

**PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN (3,0 điểm).**

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$4$	$-2$	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-2;4)$ .                      B.  $(-2;+\infty)$ .                      C.  $(-1;3)$ .                      D.  $(-\infty;-1)$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x) = (2x+1)(x-3)^2(x-2)^3$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị đại của hàm số  $y = f(x)$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

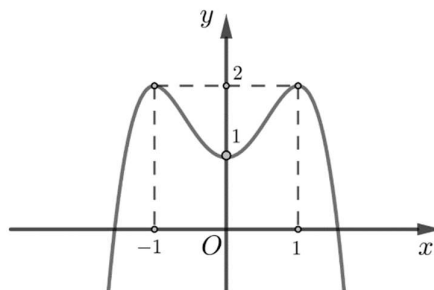
**Câu 3.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  trên đoạn  $[-3;3]$  bằng

- A.  $-16$ .                      B.  $20$ .                      C.  $0$ .                      D.  $4$ .

**Câu 4.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+1}{x-1}$  là

- A.  $y = \frac{1}{4}$ .                      B.  $y = 4$ .                      C.  $x = 4$ .                      D.  $x = 1$ .

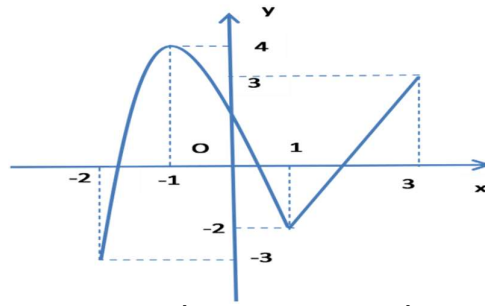
**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0;1)$ .                      B.  $(-\infty;0)$ .                      C.  $(1;+\infty)$ .                      D.  $(-1;0)$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2;3]$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-2; 3]$ . Giá trị của  $2m - 3M$  bằng:    **A.**  $-13$ .    **B.**  $-18$ .    **C.**  $-16$ .    **D.**  $-15$ .

**Câu 7.** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có trọng tâm  $G$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**.

- A.**  $\overline{AG} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})$ .    **B.**  $\overline{AG} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})$ .  
**C.**  $\overline{OG} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ .    **D.**  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0}$ .

**Câu 8.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  với tâm  $O$ . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

- A.**  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC'} = \overline{AD'} + \overline{D'O} + \overline{OC'}$     **B.**  $\overline{AB} + \overline{AA'} = \overline{AD} + \overline{DD'}$   
**C.**  $\overline{AB} + \overline{BC'} + \overline{CD} + \overline{D'A} = \vec{0}$     **D.**  $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'}$ .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là :

- A.**  $(0; 2; -3)$ .    **B.**  $(1; 0; -3)$ .    **C.**  $(1; 2; 0)$ .    **D.**  $(1; 0; 0)$ .

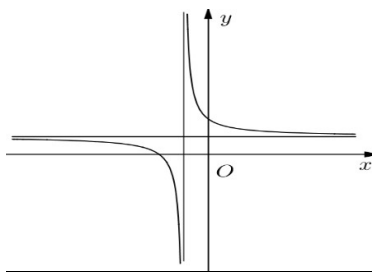
**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 0; 1)$ ,  $B(0; 5; -1)$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overline{OA}$  và  $\overline{OB}$  bằng

- A.**  $-2$ .    **B.**  $-1$ .    **C.**  $1$ .    **D.**  $2$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -2; 1)$ ,  $B(0; 1; 2)$ . Tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng là

- A.**  $M(4; -5; 0)$ .    **B.**  $M(2; -3; 0)$ .    **C.**  $M(0; 0; 1)$ .    **D.**  $M(4; 5; 0)$ .

**Câu 12.** Biết hàm số  $y = \frac{x+a}{x+1}$  ( $a$  là số thực cho trước,  $a \neq 1$ ) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.**  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .    **B.**  $y' > 0, \forall x \neq -1$ .    **C.**  $y' < 0, \forall x \neq -1$ .    **D.**  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (4,0 điểm).**

Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn **Đúng** hoặc **Sai**.

**Câu 1** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 5x^2 - 24x - 18$ .

a) Hàm số có hai cực trị.

b) Hàm số đạt cực đại tại  $x = -\frac{4}{3}$ , giá trị cực đại là  $\frac{10}{27}$ .

c) Hàm số nghịch biến trong khoảng  $(3; +\infty)$ .

d) Hàm số đồng biến trong khoảng  $\left(-\frac{4}{3}; 3\right)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (2; -2; -4)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 1)$ .

A.  $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương

C.  $|\vec{b}| = 3$

D.  $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

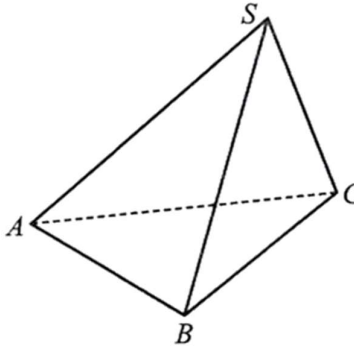
a)  $\max_{[-4;4]} f(x) = 40$  đạt được khi  $x = -1$ .

b)  $\min_{[-4;4]} f(x) = 8$  đạt được khi  $x = 3$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

d) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

**Câu 4.** Cho hình chóp  $S \cdot ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$  (Hình).



a) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và tam giác  $SAB$  đều.

b)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$  và  $(\overline{SA}, \overline{AB}) = 120^\circ$ .

c)  $\overline{SC} \cdot \overline{AB} = \frac{a^2}{2}$ .

d)  $\cos(\overline{SC}, \overline{AB}) = \frac{1}{2}$ .

**PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (3,0 điểm).**

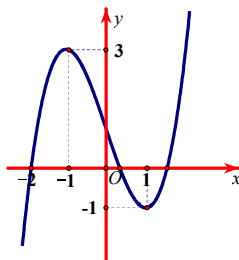
Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 2$ . Gọi  $a, b$  lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Tính giá trị của  $2a^2 + b$  ?

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-3; 4; 2)$ ,  $B(-5; 6; 2)$ ,  $C(-4; 7; -1)$ . Điểm  $D$  thỏa mãn để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Biết  $D(x_D; y_D; z_D)$ , tính giá trị của biểu thức  $S = x_D + y_D + z_D$  ?

**Câu 3.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

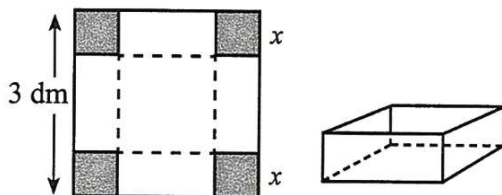
**Câu 4.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(x)|$  trên đoạn  $[-1; 1]$  lần lượt là  $M, m$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = 673M - 2019m$ .

**Câu 5.** Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm  $t = 0(s)$  cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm  $t = 126(s)$ , cho bởi hàm số sau:  $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$  ( $v$  được tính bằng  $ft/s, 1ft = 0,3048m$ ) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Biết gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian  $m(s)$  đến  $126(s)$  tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tìm  $m$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

**Câu 6.** Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh  $3dm$ . Bác Tùng cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài cạnh bằng  $x(dm)$ , rồi gập tấm nhôm lại như Hình để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp.



Gọi  $V$  là thể tích của khối hộp đó tính theo  $x(dm)$ . Giá trị lớn nhất của  $V$  là bao nhiêu decimét khối?

CHUYÊN ĐỀ 4

Các Số Đặc Trưng Đo Mức Độ Khuyết Tán Cho Mẫu Số Liệu Ghép Nhóm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 1.

□□□ Trung điểm  $x_i$  của nửa khoảng (tính bằng trung

binh cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm  $i$  là giá trị đại diện của nhóm đó.

□□□ Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $\bar{x}$ , được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m}{n}$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	$x_1$	$n_1$
$[a_2; a_3)$	$x_2$	$n_2$
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	$x_m$	$n_m$
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Bảng 1

**Ý nghĩa:** Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu đó khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng.

**2. Trung vị**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*. Giả sử nhóm  $k$  là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{n}{2}$ , tức là  $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$  nhưng  $cf_k \geq \frac{n}{2}$ . Ta gọi  $r, d, n_k$  lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm  $k$ ;  $cf_{k-1}$  là tần số tích lũy của nhóm  $k-1$ . Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $M_e$ , được tính theo công thức sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	$n_1$	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	$n_2$	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	$n_m$	$cf_m = n_1 + n_2 + \dots + n_m$
	$n$	

*Bảng 2*

$$M_e = r + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k} \right) . d$$

*Quy ước:*  $cf_0 = 0$ .

**Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đó.

**3. Tứ phân vị**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

□□□ Giả sử nhóm  $p$  là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{n}{4}$ , tức là  $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$  nhưng  $cf_p \geq \frac{n}{4}$ . Ta gọi  $s, h, n_p$  lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm  $p$ ;  $cf_{p-1}$  là tần số tích lũy của nhóm  $p-1$ .

Tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  được tính theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left( \frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) . h$$

□□□ Tứ phân vị thứ hai  $Q_2$  bằng trung vị  $M_e$ .

□□□ Giả sử nhóm  $q$  là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{3n}{4}$ , tức là  $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$  nhưng  $cf_q \geq \frac{3n}{4}$ . Ta gọi  $t, l, n_q$  lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm  $q$ ;  $cf_{q-1}$  là tần số tích lũy của nhóm  $q-1$ .

Tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  được tính theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left( \frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) . l$$

**Ý nghĩa:** Tứ phân vị  $Q_1, Q_2, Q_3$  của mẫu số liệu chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

**4. Mốt**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Giả sử nhóm  $i$  là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi  $u, g, n_i$  lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm  $i$ ;  $n_{i-1}, n_{i+1}$  lần lượt là tần số của nhóm  $i-1$ , nhóm  $i+1$ . Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $M_o$ , được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left( \frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right) . g$$

*Quy ước:*  $n_0 = 0; n_{m+1} = 0$ .

**Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đó.

**II. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM**

**1. Khoảng biến thiên**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 3*, trong đó  $n_1$  và  $n_m$  là các số nguyên dương

Gọi  $a_1, a_{m+1}$  lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm  $m$ .

Hiệu  $R = a_{m+1} - a_1$  được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

**Ý nghĩa**

□□□ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

□□□ Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị  $a_1$  và  $a_{m+1}$  của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	$n_1$
$[a_2; a_3)$	$n_2$
...	...
$[a_m; a_{m+1})$	$n_m$
	$n$

*Bảng 3*

**2. Khoảng tứ phân vị**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Gọi  $Q_1, Q_2, Q_3$  là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

**Ý nghĩa:** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

**3. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1*.

□□□ Gọi  $\bar{x}$  là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó.

Số  $s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}$  được gọi là phương sai của mẫu số liệu đó.

□□□ Căn bậc hai (số học) của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là  $s$ , nghĩa là  $s = \sqrt{s^2}$ .

**Ý nghĩa**

□□□ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó:

□□□ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

□□□ Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

**B. BÀI TẬP**

**Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** *Bảng 10* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu (tỉ USD) của 20 hãng xe ô tô có doanh thu cao nhất thế giới năm 2023.

(Nguồn: *Business Research Insights, wiki*)

Tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  của mẫu số liệu đó bằng

- A. 300.
- B. 100.
- C. 275.
- D. 175.

Nhóm	Tần số
$[50; 100)$	10
$[100; 150)$	3
$[150; 200)$	4
$[200; 250)$	1
$[250; 300)$	1
$[300; 350)$	1
	$n = 20$

*Bảng 10*

**Câu 2.** Bảng 11 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chi tiêu bình quân (đơn vị: USD) của một lượt khách quốc tế đến Việt Nam phân theo 27 quốc tịch năm 2019. (Nguồn: <https://www.gso.gov.vn>) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. (200; 300).                      B. (300; 400).  
C. (400; 500).                      D. (500; 600).

Nhóm	Tần số
[0; 500)	1
[500; 1000)	9
[1000; 1500)	14
[1500; 2000)	2
[2000; 2500)	1
	$n = 1$

**Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai**

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 3.** Bảng 12 cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê tỉ lệ che phủ rừng (đơn vị: %) của 60 tỉnh, thành phố ở Việt Nam (không bao gồm Hưng Yên, Vĩnh Long, Cần Thơ) tính đến ngày 31/12/2020.

(Nguồn: <https://bandolamnghiep.com>)

- a) Tỉ lệ che phủ rừng trung bình trên một tỉnh, thành phố được thống kê ở trên là lớn hơn 33%.  
b) Trung vị của mẫu số liệu trên là 40%.  
c) Có 20 tỉnh, thành phố có tỉ lệ che phủ rừng nhỏ hơn 10%.  
d) Mốt của mẫu số liệu trên là 5%.

Bảng 11

Nhóm	Tần số
[0; 10)	17
[10; 20)	6
[20; 30)	3
[30; 40)	4
[40; 50)	9
[50; 60)	15
[60; 70)	5
[70; 80)	1
	$n = 60$

Bảng 12

**Câu 4.** Bạn An và bạn Bình làm thí nghiệm trồng cây. Mỗi bạn trồng 40 cây cần tấy trong cốc, phần gốc của các cây khi bắt đầu trồng đều dài 4 cm. Bảng 13 và Bảng 14 lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây (đơn vị: centimét) mà bạn An và bạn Bình trồng sau 5 tuần.

Nhóm	Tần số
[20; 25)	2
[25; 30)	16
[30; 35)	20
[35; 40)	2
	$n = 40$

Bảng 13

Nhóm	Tần số
[20; 25)	5
[25; 30)	9
[30; 35)	25
[35; 40)	1
	$n = 40$

Bảng 14

- a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn An và Bình trồng không bằng nhau.  
b) Khoảng biến thiên của cả hai mẫu số liệu trên là 20.  
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng 13 là 5,5.  
d) Chiều cao của các cây mà bạn Bình trồng đồng đều hơn các cây mà bạn An trồng.

**Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 5.** Bảng 15 cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều dài đường bờ biển (đơn vị: kilômét) của 28 tỉnh, thành phố có giáp biển ở Việt Nam. (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>) Trung vị của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Nhóm	Tần số
[0; 100)	13
[100; 200)	11
[200; 300)	3
[300; 400)	1
	$n = 28$

Bảng 15

**Câu 6.** Bảng 16 cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 40 núi cao nhất Đông Nam Á. (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Nhóm	Tần số
[3500; 4000)	10
[4000; 4500)	7
[4500; 5000)	16
[5000; 5500)	4
[5500; 6000)	3
	$n = 40$

Bảng 16

**KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ TỨ PHÂN VỊ**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Điểm kiểm tra của nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:

Lớp điểm	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
Số học sinh	3	3	2	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. 9                                      B. 3                                      C. 5                                      D. 6

**Câu 2:** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250)	[250;300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 250.                                      B. 150.                                      C. 50.                                      D. 200.

**Câu 3:** Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một học sinh lớp 4 trường A được cho ở bảng sau

Thời gian (phút)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	[10;11)
Số học sinh	8	10	12	14	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 5.    B. 1.    C. 3.    D. 7.

**Câu 4:** Gọi  $Q_1, Q_2, Q_3$  là tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

- A.  $\Delta_Q = Q_1 - Q_3$ .                      B.  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ .                      C.  $\Delta_Q = Q_1 - Q_2$ .                      D.  $\Delta_Q = Q_2 - Q_1$ .

**Câu 5:** Bảng thống kê cân nặng 50 quả thanh long được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường:

Cân nặng (gam)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả thanh long	3	13	18	11	5

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

- A. 63,5.                                      B. 65,3.                                      C. 382,7.                                      D. 319,2.

**Câu 6:** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 15,25.                                      B. 20    C. 4,75.                                      D. 5,2.

**Câu 7:** Bảng thống kê tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên môn quần vợt cho kết quả như bảng sau:

Tốc độ v (km/h)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Số lần	18	28	35	43	41	35

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 162,85.                                      B. 173,17.                                      C. 9,7.    D. 10,32.

**Câu 8:** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 25.    B. 20.    C. 15.    D. 30.

**Câu 9:** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm nhận giá trị nào trong các giá trị dưới đây?  
**A. 6.                      B. 8.                      C. 10.                      D. 12.**

**Câu 10:** Bốn bạn Ánh, Ba, Châu, Dũng cùng là thành viên của một câu lạc bộ rubik. Trong một lần luyện tập rubik với nhau, mỗi bạn đã cùng giải rubik 30 lần liên tiếp và thống kê kết quả lại ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)
Ánh	1	8	5	7	9
Ba	4	8	5	6	7
Châu	5	1	6	5	13
Dũng	2	6	6	8	8

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì bạn nào có tốc độ giải rubik đồng đều nhất?

**A. Ánh.                      B. Ba.                      C. Châu.                      D. Dũng.**

**Câu 11:** Thống kê chiều cao của một số cây bạch đàn giống 1 tháng tuổi của 4 nông trường được cho bởi bảng sau:

Chiều cao ( cm )	[5; 7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Nông trường A	5	8	16	8	3
Nông trường B	5	10	8	9	6
Nông trường C	13	9	9	3	9
Nông trường D	3	12	8	12	4

Nếu xét theo khoảng tứ phân vị thì cây bạch đàn giống 1 tháng tuổi ở nông trường nào có chiều cao đồng đều nhất?

**A. Nông trường A.                      B. Nông trường B.**  
**C. Nông trường C.                      D. Nông trường D.**

**Câu 12:** Thống kê điểm kiểm tra môn Toán giữa kì I của bốn lớp 12 của một trường THPT cho bởi bảng sau:

Điểm	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10]
Lớp 12B1	7	3	15	12	4
Lớp 12B2	5	9	12	11	3
Lớp 12B3	10	10	9	6	1
Lớp 12B4	14	3	15	9	1

Nhà trường muốn đánh giá mức độ “học đều” môn Toán của các lớp. Nếu xét theo khoảng tứ phân vị thì điểm kiểm tra môn Toán giữa kì I của lớp nào đồng đều nhất?

**A. Lớp 12B1.                      B. Lớp 12B2.                      C. Lớp 12B3.                      D. Lớp 12B4.**

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Tìm hiểu thời gian sử dụng điện thoại trong tuần đầu tháng 6/2024 của kỳ nghỉ hè lớp chủ nhiệm. GVCN thu được kết quả sau:

Thời gian (giờ)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30]
Số học sinh	2	6	8	9	3	2

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là 25.
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là [15;20).
- c) Số trung bình của thống kê là 10.
- d) Khoảng tứ phân của mẫu số liệu ghép nhóm này lớn hơn 10.

**Câu 2:** Thống kê điểm thi khảo sát đầu năm môn Toán của hai lớp 12A và 12B, ta thu được kết quả sau:

Điểm thi	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10]
Số học sinh lớp 12A	0	2	6	12	10
Số học sinh lớp 12B	2	12	10	6	0

- a) Từ khoảng biến thiên của điểm thi của học sinh hai lớp 12A và 12B, điểm thi khảo sát môn Toán của lớp 12A phân tán hơn của lớp 12B.
- b) Số điểm trung bình môn Toán trong bài khảo sát đầu năm của lớp 12B lớn hơn của lớp 12A.
- c) Khoảng tứ phân của lớp 12A lớn hơn 1.
- d) Khoảng tứ phân vị của lớp 12A lớn hơn so với lớp 12B.

**Câu 3:** Thống kê lương mới từ 01/07/2024 của giáo viên hạng III của một trường THPT thu được kết quả sau:

Lương (triệu)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12]
Số lượng GV	6	20	30	5

- a) Trong thống kê số lượng giáo viên có mức lương cao nhất có số lượng thấp nhất.
- b) Lương trung bình của giáo viên hạng III trong thống kê là 10.
- c) Nhóm tứ phân vị thứ hai của thống kê là nhóm [6;8).
- c) Khoảng tứ phân vị thống kê là nhỏ hơn 1

**Câu 4:** Cho bảng số liệu bên dưới.

Nhóm	[54; 55)	[55; 56)	[56; 57)	[57; 58)	[58; 59)	Tổng tần số
Tần số	52	58	57	50	43	260

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu  $R = 5$ .
- b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm bằng  $Q_1 = 57,56$ .
- c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm bằng  $Q_3 = 56,35$ .
- d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu  $\Delta_Q = 2,34$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250;290)	[290;330)	[330;370)	[370;410)	[410;450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Câu 2:** Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)	[30;33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Câu 3:** Giả sử kết quả khảo sát ở khu vực  $A$  độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	[19;22)	[22;25)	[25;28)	[28;31)	[31;34)
Số phụ nữ khu vực $A$	10	27	31	25	7

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực  $A$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Câu 4:** Điểm kiểm tra giữa học kì 1 của một nhóm học sinh được thống kê như bảng dưới:

Khoảng điểm	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10]
Số học sinh	3	5	10	6	2

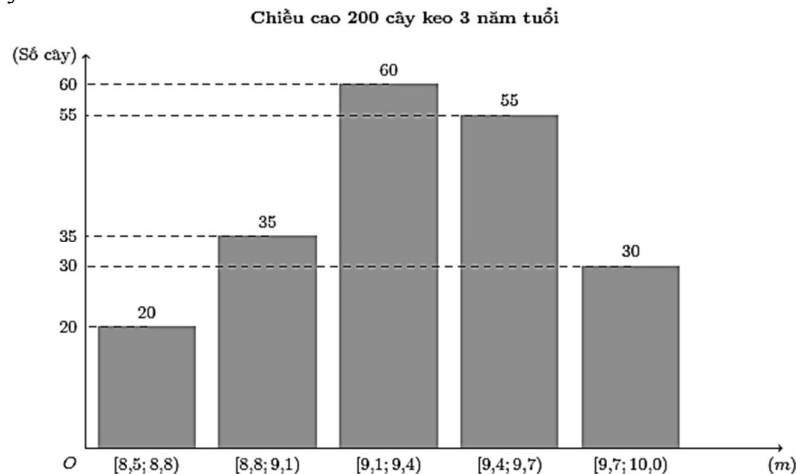
Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

**Câu 5:** Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	4	8	12	10	6

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

**Câu 6:** Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

### PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Một mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 3 thì có phương sai bằng:

- A.  $s^2 = \sqrt{3}$ .      B.  $s^2 = 3$ .      C.  $s^2 = 9$ .      D.  $s^2 = 6$ .

**Câu 2:** Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 25 thì có độ lệch chuẩn bằng:

- A. 4.      B. 5.      C. 256.      D. 50.

**Câu 3:** Khảo sát thời gian chơi thể thao trong một ngày của 42 học sinh được cho trong bảng sau (thời gian đơn vị phút):

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất là

- A. 598.      B. 597.      C. 2477,1.      D. 256,2.

**Câu 4:** Nhiệt độ trong 55 ngày của một địa phương được cho trong bảng ghép lớp sau:

Nhiệt độ (°C)	[19;22)	[22;25)	[25;28)	[28;31)	[31;34)	[34;37)
Số ngày	5	7	8	16	12	7

Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nằm trong khoảng

- A. (17;19).                      B. (20;21).                      C. (19;20).                      D. (23;25).

**Câu 5:** Khối lượng của 30 củ khoai tây được cho trong bảng sau:

Nhiệt độ (°C)	[19;22)	[22;25)	[25;28)	[28;31)	[31;34)	[34;37)
Số ngày	5	7	8	16	12	7

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai là

- A. 11.                      B. 10,95.                      C. 10,94.                      D. 10,96.

**Câu 6:** Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối (đơn vị: phút) của một số học sinh được thống kê ở bảng sau:

Thời gian	[10,5; 12,5)	[12,5; 14,5)	[14,5; 16,5)	[16,5; 18,5)	[18,5; 20,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

- A.  $s^2 \approx 4,87$ .                      B.  $s^2 \approx 2,87$ .                      C.  $s^2 \approx 1,87$ .                      D.  $s^2 \approx 3,87$ .

**Câu 7:** Số tiết tự học tại nhà trong 1 tuần (tiết/tuần) của 20 học sinh lớp 10 trường THPT A được ghi lại như sau:

9 15 11 12 16 12 10 14 14 15 16 13 16 8 9 11 10 12 18 18

Độ lệch chuẩn là

- A.  $s = 2,49$                       B.  $s = 2,99$                       C.  $s = 2,94$                       D.  $s = 2,90$ .

**Câu 8:** Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20) và có kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Phương sai của mẫu số liệu là:

- A.  $s^2 = 1,99$                       B.  $s^2 = 3,96$                       C.  $s^2 = 15,68$                       D.  $s^2 = 2,15$ .

**Câu 9:** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98.                      B. 6.                      C. 2,44.                      D. 2,5.

**Câu 10:** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 31,25.                      B. 31,26.                      C. 5,4.                      D. 5,6.

**Câu 11:** Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm dùng máy để đo (chính xác đến 0,001mm) độ dày của một chi tiết máy. Kết quả đo một số sản phẩm được thống kê trong bảng sau:

Độ dày (mm)	[18;19)	[19;20)	[20;21)	[21;22)	[22;23)
Tần số	3	7	23	25	2

Nhận xét nào sau đây **sai**?

- A. Độ lệch chuẩn của mẫu lớn hơn 2.
- B. Số trung bình của mẫu số liệu gần bằng với 20,77.
- C. Độ dày của chi tiết máy không bị sai lệch nhiều.
- D. Cỡ mẫu của mẫu số liệu là 60.

**Câu 12:** Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực  $A, B$  cho kết quả như sau:

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực $A$	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực $B$	8	4	2	5	6

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro đầu tư các lĩnh vực có giá trị trung bình tiền lãi gần bằng nhau. Lĩnh vực nào có phương sai, độ lệch chuẩn tiền lãi cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

- A. Lĩnh vực  $A$  có độ rủi ro bằng lĩnh vực  $B$ .
- B. Lĩnh vực  $A$  có độ rủi ro cao hơn lĩnh vực  $B$ .
- C. Lĩnh vực  $A$  có độ rủi ro thấp hơn lĩnh vực  $B$ .
- D. Không so sánh được.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây như bảng dưới đây:

Nhóm	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	
Tần số	5	10	7	9	7	4	$n = 42$

Xét tính đúng sai của các khẳng định a) Nhóm [45;50) có tần số tích lũy là 15.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 30.

c) Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{3n}{4}$  là nhóm [55;60).

d) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $Q_3 > 61$ .

**Câu 2:** Thống kê thời gian dùng Facebook trong một ngày của các bạn trong Lớp 12C1 được kết quả ghép nhóm như sau:

Thời gian dùng (phút)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Số bạn	15	10	5	2

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị đại diện của nhóm thứ nhất theo chiều từ trái sang phải là 5.
- b) Thời gian trung bình dùng Facebook của mỗi bạn trong lớp 12C1 là 12.
- c) Phương sai của mẫu số liệu trên gần bằng 251.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 15.

**Câu 3:** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị đại diện của nhóm [15;16) là 15,5.
- b) Số trung bình của mẫu số liệu trên là 16,25.

c) Phương sai của mẫu số liệu trên là 0,9875 .

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là  $\frac{\sqrt{395}}{20}$  .

**Câu 4:** Khối lượng của 30 củ khoai tây được thu hoạch ở một nông trại được thống kê như bảng sau:

Lớp khối lượng (gam)	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[70;80)	75	3	3
[80;90)	85	6	9
[90;100)	95	12	21
[100;110)	105	6	27
[110;120)	115	3	30
		$n = 30$	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Khoảng biên thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 50 .
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 10 .
- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 90 .
- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 120 .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là một số thập phân xấp xỉ có dạng  $a, \overline{b77}$  .  
 Tính  $a + b$  .

**Câu 2:** Sau khi điều tra về cân nặng của 40 học sinh trong lớp 12A ở một trường THPT X thu được kết quả trong mẫu ghép nhóm sau:

Nhóm	Tần số
[30;40)	2
[40;50)	10
[50;60)	16
[60;70)	8
[70;80)	2
[80;90)	2
	$n = 40$

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Câu 3:** Khối lượng (đơn vị kg) của 20 con cá được cho bởi bảng sau đây

Lớp khối lượng (kg)	[0,6;0,8)	[0,8;1,0)	[1,0;1,2)	[1,2;1,4)	$n$
Giá trị đại diện	0,7	0,9	1,1	1,3	
Tần số	4	6	6	4	20

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

**Câu 4:** Trong bài thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, bạn Minh tiến hành đo 12 lần, kết quả như sau:

Hiệu điện thế đo được (V)	[3,85;3,90)	[3,90;3,95)	[3,95;4,00)	[4,00;4,05)
Số lần đo	2	3	5	2

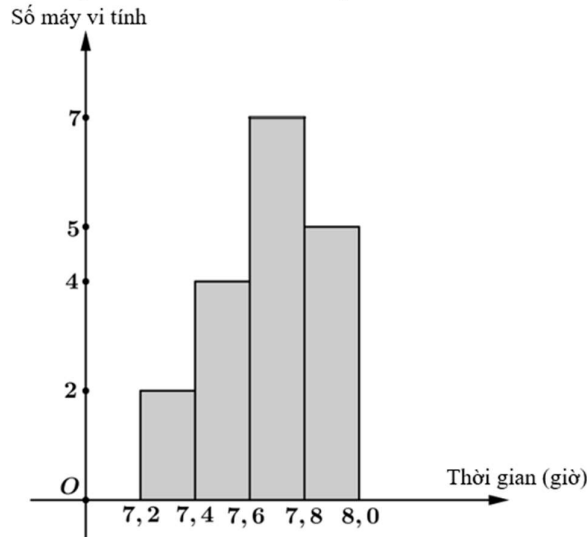
Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên ( làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba ).

**Câu 5:** Thời gian chạy tập luyện cự li 100 mét của một vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10;10,4)	[10,4;10,8)	[10,8;11,2)	[11,2;11,6)	[11,6;12,0)
Số lần chạy	3	8	6	2	1

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Câu 6:** Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục ( đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên.



Xác định phương sai của thời gian sử dụng pin ( làm tròn đến hàng trăm).

## CHỦ ĐỀ 5 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

### 1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ . Ta có:

- **Tổng hai vector:**  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- **Hiệu hai vector:**  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$  ( $k \in \mathbb{R}$ )

**Nhận xét:**  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$

### 2. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ , nếu  $M(x_M; y_M; z_M)$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$

$$\text{thì: } x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ , nếu  $G(x_G; y_G; z_G)$  là trọng

$$\text{tâm của tam giác } ABC \text{ thì: } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

**Nhận xét:**

- Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Nếu  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  thì  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tích vô hướng 2 vector:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  với  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , ta có:
  - + Hai vector vuông góc:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
  - + Góc hai vector:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

## DẠNG 1 CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

### 1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ . Ta có:

- **Tổng hai vector:**  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- **Hiệu hai vector:**  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$  ( $k \in \mathbb{R}$ )

- $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$   
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

- Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

### PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1; -4; 0)$  và  $\vec{v} = (-1; -2; 1)$ . Vector  $\vec{u} + 3\vec{v}$  có tọa độ là

- A.  $(-2; -10; 3)$ .                      B.  $(-2; -6; 3)$ .                      C.  $(-4; -8; 4)$ .                      D.  $(-2; -10; -3)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1; 3; -2)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Tọa độ vector  $\vec{u} - \vec{v}$  là:

- A.  $(3; 4; -3)$ .                      B.  $(-1; 2; -3)$ .                      C.  $(-1; 2; -1)$ .                      D.  $(1; -2; 1)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (2; 3; 2)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ . Vector  $\vec{a} - \vec{b}$  có tọa độ là

- A.  $(3; 4; 1)$ .                      B.  $(-1; -2; 3)$ .                      C.  $(3; 5; 1)$ .                      D.  $(1; 2; 3)$ .

**Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vecto  $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$ .

Tọa độ của vecto  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$  là

- A.  $\vec{d}(-7; 0; -4)$                       B.  $\vec{d}(-7; 0; 4)$                       C.  $\vec{d}(7; 0; -4)$                       D.  $\vec{d}(7; 0; 4)$

**Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ .

Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .

- A.  $(10; -2; 13)$ .                      B.  $(-2; 2; -7)$ .                      C.  $(-2; -2; 7)$ .                      D.  $(-2; 2; 7)$ .

- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .
- A.  $(10; -2; 13)$ .      B.  $(-2; 2; -7)$ .      C.  $(-2; -2; 7)$ .      D.  $(-2; 2; 7)$ .
- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{x} = (2; 1; -3)$  và  $\vec{y} = (1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$ .
- A.  $\vec{a} = (4; 1; -1)$ .      B.  $\vec{a} = (3; 1; -4)$ .      C.  $\vec{a} = (0; 1; -1)$ .      D.  $\vec{a} = (4; 1; -5)$ .
- Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$  với  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tính tọa độ của vectơ  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .
- A.  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$ .      B.  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$ .      C.  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$ .      D.  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$ .
- Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 2; 1)$  và  $\vec{b} = (-1; 3; 0)$ . Vectơ  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$  có tọa độ là
- A.  $(1; 7; 2)$ .      B.  $(1; 5; 2)$ .      C.  $(3; 7; 2)$ .      D.  $(1; 7; 3)$ .
- Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$ . Giá trị của  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$  bằng
- A. 6.      B. 11.      C.  $2\sqrt{11}$ .      D.  $2\sqrt{6}$ .
- Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Tìm  $m, n$  để các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.
- A.  $m = 7; n = -\frac{3}{4}$ .      B.  $m = 4; n = -3$ .      C.  $m = 1; n = 0$ .      D.  $m = 7; n = -\frac{4}{3}$ .
- Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = (m; 2; m+1)$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .
- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.
- Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Tìm  $m, n$  để các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.
- A.  $m = 7; n = -\frac{3}{4}$ .      B.  $m = 7; n = -\frac{4}{3}$ .      C.  $m = 4; n = -3$ .      D.  $m = 1; n = 0$ .
- Câu 14.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1; 2; -3), B(1; 0; 2), C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Khi đó  $x + y$  bằng
- A.  $x + y = 1$ .      B.  $x + y = 17$ .      C.  $x + y = -\frac{11}{5}$ .      D.  $x + y = \frac{11}{5}$ .
- Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$ . Với giá trị nào của  $x, y$  thì  $A, B, M$  thẳng hàng.
- A.  $x = 4; y = 7$       B.  $x = -4; y = -7$       C.  $x = 4; y = -7$       D.  $x = -4; y = 7$
- Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -2; 1), B(0; 1; 2)$ . Tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng là
- A.  $M(4; -5; 0)$ .      B.  $M(2; -3; 0)$ .      C.  $M(0; 0; 1)$ .      D.  $M(4; 5; 0)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (2; -2; -4), \vec{b} = (1; -1; 1)$ .

A.  $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương

C.  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D.  $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

**Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 3; 1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 5; 2)$ ,  $\vec{c} = (4; -1; 3)$  và  $\vec{x} = (-3; 22; 5)$ .

A.  $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$ .

B.  $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ .

C.  $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ .

D.  $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -5; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 7; 2)$ .

A.  $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$  với  $\vec{u} = (11; 22; 18)$ .

B.  $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$  với  $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$ .

C.  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  với  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ .

D.  $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$  với  $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.**

**Câu 1.** Tìm tọa độ vector  $\vec{x}$ , biết rằng:  $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$  với  $\vec{a} = (5; 4; -1)$ ,  $\vec{b} = (2; -5; 3)$

**Câu 2.** Cho vector  $\vec{a} = (1; -1; 0)$ , xác định  $k$  để vector  $\vec{u} = (2; 2k - 1; 0)$  cùng phương với vector  $\vec{a}$ .

**Câu 3.** Cho hai vector  $\vec{a} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ . Tìm  $m$  để  $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b}$  cùng phương.

**Câu 4.** Cho ba vector  $\vec{a} = (1; -7; 9)$ ,  $\vec{b} = (3; -6; 1)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -7)$ . Biểu diễn vector  $\vec{u} = (-4; 13; -6)$  theo các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Câu 5.** Cho ba vector  $\vec{a} = (1; -1; 1)$ ,  $\vec{b} = (0; 1; 2)$ ,  $\vec{c} = (4; 2; 3)$ . Biểu diễn vector  $\vec{u} = (1; 2; -2)$  theo các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Câu 6.** Cho 3 vector  $\vec{a} = (2; 5; 4)$ ,  $\vec{b} = (6; 0; -3)$ ,  $\vec{c} = (3; 2; -1)$ . Xác định các số thực  $m, n$  để  $m\vec{a} - 3n\vec{b} = \vec{c}$ .

**Câu 7.** Cho 3 vector :  $\vec{a} = (2; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (1; -3; 2)$ ,  $\vec{c} = (3; 2; -4)$ . Xác định các số thực  $m, n$  để  $\frac{m}{3}\vec{a} - n\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$ .

**Câu 8.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(4; 2; 3), B(-2; 1; -1), C(3; 8; 7)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Câu 9.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho  $A(2; 5; 3)$ ,  $B(3; 7; 4)$ ,  $C(x; y; 6)$ . Tìm  $x; y$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

### TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTOR

- Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Tích vô hướng 2 vector:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ ;

- Hai vector vuông góc:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

- Góc hai vector:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u}=(3;0;1)$  và  $\vec{v}=(2;1;0)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{u}.\vec{v}$ .

- A.  $\vec{u}.\vec{v}=8$ .                      B.  $\vec{u}.\vec{v}=6$ .                      C.  $\vec{u}.\vec{v}=0$ .                      D.  $\vec{u}.\vec{v}=-6$ .

**Câu 2.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$  và  $\vec{v}=(2;-1)$ . Tính  $\vec{u}.\vec{v}$ .

- A.  $\vec{u}.\vec{v}=-1$ .                      B.  $\vec{u}.\vec{v}=1$ .                      C.  $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$ .                      D.  $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$ .

**Câu 3.** Cho hai véc tơ  $\vec{a}=(1;-2;3)$ ,  $\vec{b}=(2;1;2)$ . Khi đó, tích vô hướng  $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$  bằng

- A. 12.                      B. 2.                      C. 11.                      D. 10.

**Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{u}=(2;-1;1)$  và  $\vec{v}=(0;-3;-m)$ . Tìm số thực  $m$  sao cho tích vô hướng  $\vec{u}.\vec{v}=1$ .

- A.  $m=4$ .                      B.  $m=2$ .                      C.  $m=3$ .                      D.  $m=-2$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có:  $\vec{u}.\vec{v}=1 \Leftrightarrow 3-m=1 \Leftrightarrow m=2$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  tạo với nhau một góc  $120^\circ$  và  $|\vec{u}|=2$ ,  $|\vec{v}|=5$ .

Tính  $|\vec{u}+\vec{v}|$

- A.  $\sqrt{19}$ .                      B.  $-5$ .                      C. 7.                      D.  $\sqrt{39}$ .

**Câu 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}=(2;1;0)$  và  $\vec{b}=(1;0;-2)$ . Tính  $\cos(\vec{a},\vec{b})$ .

- A.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$                       B.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$                       C.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$                       D.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u}=(\sqrt{3};0;1)$  là

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}=(3;4;0)$ ,  $\vec{b}=(5;0;12)$ . Côsin của góc giữa  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $\frac{3}{13}$ .                      B.  $\frac{5}{6}$ .                      C.  $-\frac{5}{6}$ .                      D.  $-\frac{3}{13}$ .

**Câu 9.** Cho  $\vec{u}=(1;1;0)$ ,  $\vec{v}=(0;-1;0)$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $135^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$  cho 2 véc tơ  $\vec{a}=(2;1;-1)$ ;  $\vec{b}=(1;3;m)$ . Tìm  $m$  để  $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$ .

- A.  $m=-5$ .                      B.  $m=5$ .                      C.  $m=1$ .                      D.  $m=-2$

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho véc tơ  $\vec{u}=(1;1;-2)$ ,  $\vec{v}=(1;0;m)$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để góc giữa  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  bằng  $45^\circ$ .

- A.  $m=2$ .                      B.  $m=2\pm\sqrt{6}$ .                      C.  $m=2-\sqrt{6}$ .                      D.  $m=2+\sqrt{6}$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc tơ  $\vec{a}=(5;3;-2)$  và  $\vec{b}=(m;-1;m+3)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là góc tù?

- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 5.

**Câu 13.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1;3)$ ,  $B(-2;-2)$ ,  $C(3;1)$ . Tính cosin góc  $A$  của tam giác.

- A.  $\cos A=\frac{2}{\sqrt{17}}$                       B.  $\cos A=\frac{1}{\sqrt{17}}$                       C.  $\cos A=-\frac{2}{\sqrt{17}}$                       D.  $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1;-2;3)$ ,  $B(0;3;1)$ ,  $C(4;2;2)$ . Cosin của góc  $\widehat{BAC}$  là

- A.  $\frac{9}{\sqrt{35}}$ .                      B.  $-\frac{9}{\sqrt{35}}$ .                      C.  $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$ .                      D.  $\frac{9}{2\sqrt{35}}$ .

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$  cho  $A(1;2;3); B(-1;2;1); C(3;-1;-2)$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .

- A. -6.                                  B. -14.                                  C. 14.                                  D. 6.

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $M(2;3;-1)$ ,  $N(-1;1;1)$  và  $P(1;m-1;2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

- A.  $m = 2$                               B.  $m = -6$                               C.  $m = 0$                               D.  $m = -4$

**Câu 17.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(0;0;2)$ . Có tất cả bao nhiêu điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn  $M$  không trùng với các điểm  $A, B, C$  và  $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(5;3;-1)$ ,  $B(2;3;-4)$ ,  $C(3;1;-2)$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  bằng:

- A.  $9 - 2\sqrt{6}$ .                          B.  $9 - 3\sqrt{6}$ .                          C.  $9 + 3\sqrt{6}$ .                          D.  $9 + 2\sqrt{6}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-4; -2; 6)$ .

- A.  $\vec{b} = -2\vec{a}$ .  
 B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .  
 C.  $\vec{a}$  ngược hướng với  $\vec{b}$ .  
 D.  $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ .

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ .

- A.  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ .  
 B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ .  
 C.  $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ .  
 D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Câu 21.** Biết  $\vec{c} = (x; y; z)$  khác  $\vec{0}$  và vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{a} = (1; 3; 4)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ .

- A.  $5z - x = 0$ .  
 B.  $7x - y = 0$ .  
 C.  $5y + 7z = 0$ .  
 D.  $7x + y = 0$ .

**Câu 22.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(0; 0; 3)$ ,  $B(0; 0; -1)$ ,  $C(1; 0; -1)$ ,  $D(0; 1; -1)$ .

- A.  $AB \perp BD$ .  
 B.  $AB \perp BC$ .  
 C.  $AB \perp AC$ .  
 D.  $AB \perp CD$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.**

**Câu 23.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 1)$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

- a) Tính các tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{b}$ . Trong ba vectơ trên có các cặp vectơ nào vuông góc?

b) Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b}), \cos(\vec{a}, \vec{i})$

**Câu 24.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 vectơ  $\vec{a} = (2; 5; 4), \vec{b} = (6; 0; -3), \vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ .

b) Tính góc giữa 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Câu 25.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 vectơ  $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1), \vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính  $4\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$ .

b) Tính góc giữa 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Câu 26.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba vectơ  $\vec{a} = (2; 3; -1), \vec{b} = (1; -2; 3), \vec{c} = (2; -1; 1)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{u}$ , biết rằng:  $\vec{u} \perp \vec{a}, \vec{u} \perp \vec{b}, \vec{u} \cdot \vec{c} = -6$ .

**Câu 27.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2), \vec{c} = (3; 2; -4)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{u}$ , biết rằng:  $\vec{a} \cdot \vec{u} = -5, \vec{u} \cdot \vec{b} = -11, \vec{u} \cdot \vec{c} = 20$ .

**Câu 28.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 4 điểm  $A(2; 4; -1), B(1; 4; -1), C(2; 4; 3), D(2; 2; -1)$ . Biết  $M(x; y; z)$ , để  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $x + y + z$  bằng bao nhiêu?

**Câu 29.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1), B(-2; 1; 0), C(2; -3; 1)$ . Điểm  $S(a; b; c)$  sao cho  $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $T = a + b + c$

**Câu 30.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(2; 5; 1), B(-2; -6; 2), C(1; 2; -1)$  và điểm  $M(m; m; m)$ , để  $MA^2 - MB^2 - MC^2$  đạt giá trị lớn nhất thì  $m$  bằng bao nhiêu?

**Câu 31.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(2; 5; 1), B(-2; -6; 2), C(1; 2; -1)$  và điểm  $M(m; m; m)$ , để  $|\overline{MB} - 2\overline{AC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $m$  bằng bao nhiêu?

**Câu 32.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1; 2; 3), B(2; 2; 1), M \in Ox$ . Tìm điểm  $M$  sao cho biểu thức  $T = |\overline{MA} + \overline{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 33.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(-1; 2; -3), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 1), M \in Oy$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = |\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$  để  $T$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 34.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(0; 2; 3), B(2; 1; 1), C(1; 2; 3), M \in Oz$ . Tìm điểm  $M$  sao cho biểu thức  $T = |\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 35.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 2; 0), B(2; 0; -2)$  và điểm  $M(a; b; c)$  với  $a, b, c$  là các số thực thay đổi thỏa mãn  $a + 2b - c - 1 = 0$ . Biết  $MA = MB$  và góc  $\widehat{AMB}$  có số đo lớn nhất. Tính  $S = a + 2b + 3c$ .

### ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

- $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

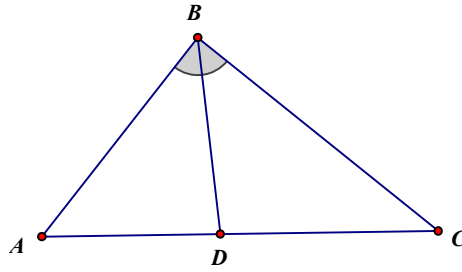
- $M(x_M; y_M; z_M)$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  thì:  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

- $G(x_G; y_G; z_G)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- Cho tam giác  $ABC$  có  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overline{DA} = \frac{BA}{BC} \overline{DC}$$



**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 36.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2;2;1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $OA$ .

- A.  $OA = \sqrt{5}$                       B.  $OA = 5$                       C.  $OA = 3$                       D.  $OA = 9$

**Câu 37.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-3;1)$ ,  $B(3;0;-2)$ . Tính độ dài  $AB$ .

- A. 26.                      B. 22.                      C.  $\sqrt{26}$ .                      D.  $\sqrt{22}$ .

**Câu 38.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;1;2)$  và  $B(3;1;0)$ . Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

- A.  $(4;2;2)$ .                      B.  $(2;1;1)$ .                      C.  $(2;0;-2)$ .                      D.  $(1;0;-1)$ .

**Câu 39.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(-1;5;3)$  và  $M(2;1;-2)$ . Tọa độ điểm  $B$  biết  $M$  là trung điểm của  $AB$  là

- A.  $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$ .                      B.  $B(-4;9;8)$ .                      C.  $B(5;3;-7)$ .                      D.  $B(5;-3;-7)$ .

**Câu 40.** Trong không gian cho hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-2;3)$ ,  $B(-1;2;5)$ ,  $C(0;0;1)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $G(0;0;3)$ .                      B.  $G(0;0;9)$ .                      C.  $G(-1;0;3)$ .                      D.  $G(0;0;1)$ .

**Câu 41.** Cho bốn điểm  $S(1,2,3)$ ;  $A(2,2,3)$ ;  $B(1,3,3)$ ;  $C(1,2,4)$ . Xác định tọa độ trọng tâm  $G$  của hình chóp  $SABC$ .

- A.  $(5;9;13)$ .                      B.  $\left(\frac{5}{3};3;\frac{13}{3}\right)$ .                      C.  $\left(1;\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$ .                      D.  $\left(\frac{5}{4};\frac{9}{4};\frac{13}{4}\right)$

**Câu 42.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $B(1;2;-3)$ ,  $C(7;4;-2)$  Nếu điểm  $E$  thỏa mãn đẳng thức  $\overline{CE} = 2\overline{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là:

- A.  $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$                       B.  $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$ .                      C.  $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$                       D.  $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

**Câu 43.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;1;-2)$ ,  $B(2;-3;5)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ , tọa độ điểm  $M$  là

- A.  $\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ .                      B.  $(4;5;-9)$ .                      C.  $\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$ .                      D.  $(1;-7;12)$ .

**Câu 44.** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm là  $A(1;3;-1)$ ,  $B(3;-1;5)$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ .

- A.  $M\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3};1\right)$ .                      B.  $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$ .                      C.  $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$ .                      D.  $M(4;-3;8)$ .

**Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\overline{AM} = 2\overline{MB}$ .

- A.  $M(0; 0; 3)$ .                      B.  $M(0; 0; -3)$ .                      C.  $M(-8; -4; 7)$ .                      D.  $M(8; 4; -7)$ .

**Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(3; -4; 0)$ ,  $B(-1; 1; 3)$ ,  $C(3; 1; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  trên trục hoành sao cho  $AD = BC$ .

- A.  $D(6; 0; 0)$ ,  $D(12; 0; 0)$                       B.  $D(0; 0; 0)$ ,  $D(6; 0; 0)$   
C.  $D(-2; 1; 0)$ ,  $D(-4; 0; 0)$                       D.  $D(0; 0; 0)$ ,  $D(-6; 0; 0)$

**Câu 47.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .

- A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$                       B.  $\frac{AM}{BM} = 2$                       C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$                       D.  $\frac{AM}{BM} = 3$

**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ;  $D(0; 2a; 0)$ ,  $A'(0; 0; 2a)$  với  $a \neq 0$ . Độ dài đoạn thẳng  $AC'$  là

- A.  $|a|$ .                      B.  $2|a|$ .                      C.  $3|a|$ .                      D.  $\frac{3}{2}|a|$ .

**Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$ ,  $B(3; 0; 8)$ ,  $D(-5; -4; 0)$ . Biết đỉnh  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  và có tọa độ là những số nguyên, khi đó  $|\overline{CA} + \overline{CB}|$  bằng:

- A.  $10\sqrt{5}$ .                      B.  $6\sqrt{10}$ .                      C.  $10\sqrt{6}$ .                      D.  $5\sqrt{10}$ .

**Câu 50.** Trong không gian  $Oxyz$  cho các điểm  $A(5; 1; 5)$ ;  $B(4; 3; 2)$ ;  $C(-3; -2; 1)$ . Điểm  $I(a; b; c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính  $a + 2b + c$ ?

- A. 1.                      B. 3.                      C. 6.                      D. -9.

**Câu 51.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $B(-2; 2; 0)$  và  $C(4; 1; -1)$ . Trên mặt phẳng  $(Oxz)$ , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

- A.  $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .                      B.  $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ .                      C.  $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ .                      D.  $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 52.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ . Giá trị của  $a + b + 2c$  bằng

- A. 5.                      B. 4.                      C. 14.                      D. 15.

**Câu 53.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -2)$  và  $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Biết  $I(a; b; c)$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$ . Giá trị  $a - b + c$  bằng

- A. 1                      B. 3                      C. 2                      D. 0

**Câu 54.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 2; 1)$ ,  $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OMN$ .

- A.  $I(1; 1; 1)$ .                      B.  $I(0; 1; 1)$ .                      C.  $I(0; -1; -1)$ .                      D.  $I(1; 0; 1)$ .

**Câu 55.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$ . Có tất cả bao nhiêu điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn  $M$  không trùng với các điểm  $A, B, C$  và  $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ ?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 56.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;3;1)$ ,  $B(2;1;0)$ ,  $C(-3;-1;1)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng 3 lần diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $D(-12;-1;3)$ .      B.  $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$ .      C.  $D(8;7;-1)$ .      D.

$$\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$$

**Câu 57.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Ba đỉnh  $A(1;2;1)$ ,  $B(2;0;-1)$ ,  $C(6;1;0)$  Hình thang có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a;b;c)$ , tìm mệnh đề đúng?

- A.  $a+b+c=6$ .      B.  $a+b+c=5$ .      C.  $a+b+c=8$ .      D.  $a+b+c=7$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 58.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tam giác  $ABC$  với  $A(1;-3;3)$ ;  $B(2;-4;5)$ ,  $C(a;-2;b)$  nhận điểm  $G(1;c;3)$  làm trọng tâm của nó.

- A. Nếu  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  thì tọa độ điểm là  $M\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};4\right)$ .  
 B. Tọa độ vector là  $\overline{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$   
 C.  $2024a + 2025b = 2025$   
 D.  $a+b+c = -2$

**Câu 59.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0;1;-2)$  và  $B(3;-1;1)$ . Tọa độ điểm  $M(x;y;z)$  thỏa mãn  $\overline{AM} = 3\overline{AB}$ .

- A.  $x+2y=1$ .  
 B.  $3y+z=1$ .  
 C.  $x+2y-2z=-15$ .  
 D.  $x+y+z=11$ .

**Câu 60.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(3;0;0)$ ,  $D(0;3;0)$ ,  $D'(0;3;-3)$ . Tọa độ trọng tâm tam giác  $A'B'C$  là  $G(x_G;y_G;z_G)$ .

- A.  $x_G + y_G + z_G = 1$ .  
 B.  $2x_G - y_G = 3$ .  
 C.  $2x_G + y_G - 3z_G = -1$ .  
 D.  $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$ .

**Câu 61.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$ ,  $C(-4;7;5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là  $D(a;b;c)$ .

- A.  $a+b=3$ .  
 B.  $a+c = \frac{5}{3}$ .  
 C.  $a+b-2c=1$ .  
 D.  $a+b+c=4$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.**

**Câu 62.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho:  $A(1;-1;1)$ ,  $B(2;-3;2)$ ,  $C(4;-2;2)$ .

- a) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn  $AB$ .  
 b) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .

c) Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \frac{1}{2}\overline{MC} = 3\overline{MB}$

**Câu 63.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho:  $A(1;-1;1)$ ,  $B(2;-3;2)$ ,  $C(4;-2;2)$ ,  $D(3;0;1)$ ,  $E(1;2;3)$

a) Chứng tỏ rằng  $ABCD$  là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính cos các góc của tam giác  $ABC$

c) Tìm trên đường thẳng  $Oy$  điểm cách đều hai điểm  $AB$

d) Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = \vec{0}$

**Câu 64.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$  cho  $A(4;-1;2)$ ;  $B(7;3;2)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $M \in Ox$  và cách đều hai điểm  $A, B$ .

b) Tìm  $M$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho tam giác  $ABM$  vuông cân tại  $A$ .

**Câu 65.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1;2;-3)$ ,  $B(0;3;7)$ ,  $C(2;5;0)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

c) Tính góc  $\widehat{ABC}$ .

d) Tính diện tích  $\Delta ABC$ . Từ đó suy ra độ dài đường cao  $AH$  của  $\Delta ABC$ .

**Câu 66.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(3;-4;7)$ ,  $B(-5;3;-2)$ ,  $C(1;2;-3)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  tạo thành  $\Delta ABC$ .

b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành

c) Tìm tọa độ trọng tâm của  $\Delta ABC$ .

d) Tính góc  $\widehat{ABC}$ .

e) Tính độ dài đường cao  $BH$  của  $\Delta ABC$

**Câu 67.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết rằng:

$A(1;2;-1)$ ,  $B(-1;1;3)$ ,  $C(-1;-1;2)$ ,  $D'(2;-2;-3)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $BD'$  và  $B'D$ .

c) Tìm tọa độ trọng tâm của  $\Delta AA'C$ .

**Câu 68.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết rằng:  $A(0;2;2)$ ,  $B(0;1;2)$ ,  $C(-1;1;1)$ ,  $C'(1;-2;-1)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $AC'$  và  $A'C$ .

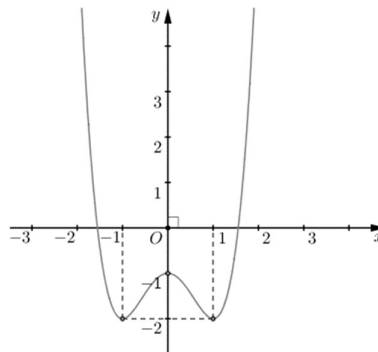
c) Tìm tọa độ trọng tâm của  $\Delta B'DD'$ .

## CHUYÊN ĐỀ 6

### BÀI TẬP ÔN TẬP HỌC KỲ I: (2 tiết)

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM** Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



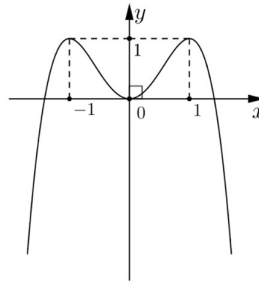
A.  $(-\infty; -1)$

B.  $(-1; 1)$

C.  $(-1; 0)$

D.  $(0; 1)$

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.  $(-1; 0)$ .                      B.  $(-\infty; -1)$ .                      C.  $(0; 1)$ .                      D.  $(0; +\infty)$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$-4$	$+\infty$	

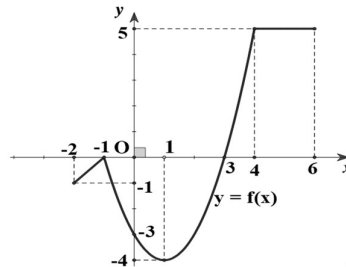
Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2.                      B. 3.                      C. 0.                      D. -4.

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 1.

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-2; 6]$ .

Giá trị của  $M - m$  bằng

- A. 9.                      B. -8.                      C. -9.                      D. 8.

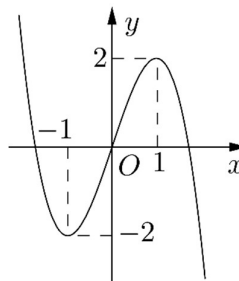
**Câu 6.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 21x$  trên đoạn  $[2; 19]$  bằng

- A. -36.                      B.  $-14\sqrt{7}$ .                      C.  $14\sqrt{7}$ .                      D. -34.

**Câu 7.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  có tiệm cận xiên là

- A.  $y = x$ .                      B.  $y = -x$ .                      C.  $y = x + 1$ .                      D.  $y = -x + 1$ .

**Câu 8.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 1$  là



A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

**Câu 9:** Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu quần mới. Người phỏng vấn yêu cầu cho điểm mẫu quần đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày theo mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 4. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

A. 75.

B. 70,8.

C. 78,8.

D. 74,8.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[50;60)	3	3
[60;70)	5	8
[70;80)	25	33
[80;90)	4	37
[90;100)	3	40
	$n = 40$	

**Câu 10:** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Bảng 4

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 1,5.

B. 0,9.

C. 0,6.

D. 0,3.

**Câu 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ .

Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .

A.  $(10; -2; 13)$ .

B.  $(-2; 2; -7)$ .

C.  $(-2; -2; 7)$ .

D.  $(-2; 2; 7)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -4; 3)$  và  $B(2; 2; 7)$ . Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

A.  $(4; -2; 10)$

B.  $(1; 3; 2)$

C.  $(2; 6; 4)$

D.  $(2; -1; 5)$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ .

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

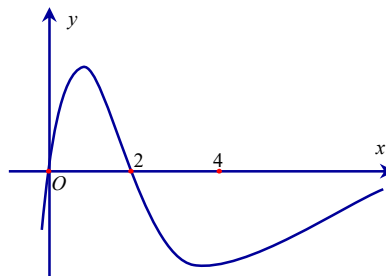
a)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ . b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ . c)  $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ . d) Vec tơ cùng vuông góc với vec tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có tọa độ bằng  $(-1; -4; 3)$ .

**Câu 2.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thuộc đoạn  $[-20; 20]$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x+m+6}{x-m}$  trên đoạn  $[1; 3]$  là số dương?

**Câu 3.** Cho hàm số có  $f(x)$  có đạo hàm là hàm  $f'(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên.

Biết rằng  $f(0) - f(2) = f(4) - f(3)$ . Giả sử giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$

đạt được lần lượt tại  $x_0$  và  $x_1$ . Tìm  $x_0 + x_1$ .



**Câu 4.** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Số ngày	5	10	9	4	2

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 250 (km).  
 b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 79,17.  
 c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 145.  
 d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 55,68.

**PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

**Câu 2:** Trong thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần và cho kết quả như sau:

Hiệu điện thế đo được (Vôn)	[3,85; 3,90)	[3,90; 3,95)	[3,95; 4,00)	[4,00; 4,05)
Số lần An đo	1	6	2	1
Số lần Bình đo	1	3	4	2

Gọi độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của An và Bình là  $a$  và  $b$  Tính  $a+b$ , kết quả là tròn đến hàng phần trăm.

**Câu 3.** Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán  $x$  chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là  $P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$ . Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được khi sản xuất đúng bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.

**Câu 4.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $900 m^2$ . Biết chiều dài của mảnh vườn là  $x (m)$ . Gọi biểu thức tính chu vi của mảnh vườn là  $P(x)$  (mét). Biết rằng phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $P(x)$  là  $y = ax + b$ . Tính giá trị biểu thức  $T = 10^a + b$

**Câu 5.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức

$$N(t) = 100e^{0,012t} (N(t))$$

được tính bằng triệu người ( $0 \leq t \leq 50$ ). Đạo hàm của hàm số  $N(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm

**Câu 6:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau và  $AD = 2, AB = AC = 1$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ . Tính độ dài  $GI$ . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

## CHUYÊN ĐỀ 7

### PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

##### 1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình  $\sin x = m (1)$

• Với  $|m| > 1$ , phương trình (1) vô nghiệm.

• Với  $|m| \leq 1$ , gọi  $\alpha$  là số thực thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\sin \alpha = m$ .

Khi đó, ta có:  $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý**

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình  $\sin x = m$  :

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu  $x$  là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác  $x$  sao cho  $\sin x = \sin a^\circ$  như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình  $\cos x = m$  (2)

- Với  $|m| > 1$ , phương trình (2) vô nghiệm.
- Với  $|m| \leq 1$ , gọi  $\alpha$  là số thực thuộc đoạn  $[0; \pi]$  sao cho  $\cos \alpha = m$ .

Khi đó, ta có:  $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý**

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình  $\cos x = m$  :

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu  $x$  là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác  $x$  sao cho  $\cos x = \cos a^\circ$  như sau:

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

c) Phương trình  $\tan x = m$

Gọi  $\alpha$  là số thực thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  sao cho  $\tan \alpha = m$ . Khi đó, ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu  $x$  là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác  $x$  sao cho  $\tan x = \tan a^\circ$  như sau:

$$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

d) Phương trình  $\cot x = m$

Gọi  $\alpha$  là số thực thuộc đoạn  $(0; \pi)$  sao cho  $\cot \alpha = m$ . Khi đó, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu  $x$  là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác  $x$  sao cho  $\cot x = \cot a^\circ$  như sau:

$$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

**2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản**

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

với phương trình có dạng:

$$\sin^2 u(x) = \sin^2 v(x), \cos^2 u(x) = \cos^2 v(x), \sin^2 u(x) = \cos^2 v(x)$$

ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng  $\cos f(x) = \cos g(x)$ .

- Với một số phương trình lượng giác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích  $A(x) \cdot B(x) = 0$ .

## II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

### 1. Phương trình mũ

Với  $a > 0, a \neq 1$  thì:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \quad \text{với } b > 0;$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

### III. Phương trình lôgarit

Với  $a > 0, a \neq 1$  thì:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0. \end{cases}$$

### IV. Bất phương trình mũ

Với  $a > 0, a \neq 1$  thì:

**a)** Xét bất phương trình:  $a^{f(x)} > b$ .

Nếu  $b \leq 0$ , tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của  $f(x)$ ;

Nếu  $b > 0, a > 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) > \log_a b$ ;

Nếu  $b > 0, 0 < a < 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) < \log_a b$ .

**b)** Xét bất phương trình:  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ .

Nếu  $a > 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) > g(x)$ ;

Nếu  $0 < a < 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) < g(x)$ .

Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.

### V. Bất phương trình lôgarit

Với  $a > 0, a \neq 1$  thì:

**a)** Xét bất phương trình:  $\log_a f(x) > b$ .

Nếu  $a > 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) > a^b$ ;

Nếu  $0 < a < 1$  thì bất phương trình đưa về:  $0 < f(x) < a^b$ .

**b)** Xét bất phương trình:  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ .

Nếu  $a > 1$  thì bất phương trình đưa về:  $f(x) > g(x) > 0$ ;

Nếu  $0 < a < 1$  thì bất phương trình đưa về:  $0 < f(x) < g(x)$ .

Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.

## B. BÀI TẬP

### Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1. [MĐ2]** Các nghiệm của phương trình  $\sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = 0$  là:

**A.**  $x = -\frac{\pi}{5} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \frac{2\pi}{5} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$



**D.**  $x = 135^\circ + k180^\circ$  và  $x = -105^\circ + k180^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 9:** [MD2] Các góc lượng giác  $x$  sao cho  $\tan(2x+27^\circ) = \tan 35^\circ$  là:

**A.**  $x = 4^\circ + k180^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**B.**  $x = -4^\circ + k180^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**C.**  $x = -4^\circ + k90^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**D.**  $x = 4^\circ + k90^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 10:** [MD2] Các góc lượng giác  $x$  sao cho  $\sin 2x = \sin(36^\circ - x)$  là:

**A.**  $x = 12^\circ + k120^\circ$  và  $x = 144^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**B.**  $x = 12^\circ + k120^\circ$  và  $x = 48^\circ + k120^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**C.**  $x = 12^\circ + k360^\circ$  và  $x = 144^\circ + k120^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**D.**  $x = 35^\circ + k360^\circ$  và  $x = 144^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 11:** [MD2] Số nghiệm của phương trình  $\cos x = 1$  trên khoảng  $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}\right)$  là:

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Câu 12:** [MD3] Số nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  là:

**A.** 2.

**B.** 5.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Câu 13:** [MD2] Các nghiệm của phương trình  $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$  là:

**A.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**D.**  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 14:** [MD2] Các nghiệm của phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 6x$  là:

**A.**  $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$  và  $x = \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**B.**  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**C.**  $x = k2\pi$  và  $x = \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**D.**  $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$  và  $x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 15:** [MD1] Nghiệm của phương trình  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$  là:

**A.**  $x = -2$ .

**B.**  $x = -\sqrt{2}$ .

**C.**  $x = \sqrt{2}$ .

**D.**  $x = 2$ .

**Câu 16:** [MD2] Nghiệm của phương trình  $2^{x^2-x} = 4$  là:

**A.**  $x = -1$  và  $x = 2$ .

**B.**  $x = 0$  và  $x = 1$ .

**C.**  $x = 1$  và  $x = -2$ .

**D.**  $x = 0$  và  $x = 2$

**Câu 17:** [MD2] Tổng các nghiệm của phương trình  $5^{x^2-3x} = 10$  là :

**A.**  $-3$ .

**B.**  $\log_5 10$ .

**C.**  $3$ .

**D.**  $-\log_5 10$ .

**Câu 18:** [MD2] Nghiệm của phương trình  $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x} = 5^{x+3}$  là

**A.**  $x = -3$ .

**B.**  $x = 5$ .

**C.**  $x = -5$ .

**D.**  $x = 3$ .

**Câu 19:** [MD2] Nghiệm của phương trình  $\log_{27}(x^2 - 1) = \frac{1}{3}$  là

**A.**  $x = \pm 2$ .

**B.**  $x = \pm\sqrt{10}$ .

**C.**  $x = 2$ .

**D.**  $x = \sqrt{10}$ .



d) Tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 29:** [MĐ3] Cho phương trình:  $\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$ .

a) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế trái của phương trình đưa về dạng:  $\sin 3x \cos x$ .

b) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế phải của phương trình đưa về dạng:  $\cos 3x \cos x$ .

c) Nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình  $\cos x = 0$  và phương trình  $\sin 3x = \cos 3x$ .

d) Nghiệm của phương trình đã cho là:  $x = k2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 30:** [MĐ3] Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao  $h(m)$  của mực nước theo thời gian  $t$  (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức

$$h = 14 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \text{ với } 0 \leq t \leq 24.$$

a) Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước biển là cao nhất

b) Chiều cao của mực nước biển thấp nhất vào lúc 12 giờ

c) Mực nước tại bến cảng cao 18 m vào lúc 2 giờ 10 phút

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 18 m. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 10 giờ sáng hôm trước đến 2 giờ sáng hôm sau.

**Câu 31:** [MĐ3] Cho bất phương trình  $4^{x^2+5} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}$

a) Ta có:  $4 = 2^2; \frac{1}{8} = 2^{-3}$ .

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$2(x^2 + 50) = -3(x - x^2)$$

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 6.

d) Tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là  $-4$ .

**Câu 32:** [MĐ3] Cho bất phương trình  $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}(-x^2 + 7x + 18) \geq -2$ .

a) Ta có:  $0 < \frac{1}{3\sqrt{2}} < 1$ .

b) Bất phương trình đã cho là nghiệm của bất phương trình

$$-x^2 + 7x + 18 \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 14.

**Câu 33.** [MĐ3] Mức cường độ âm  $L$  (đơn vị dB) được tính bởi công thức  $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$ , trong

đó  $I$  (đơn vị:  $W/m^2$ ) là cường độ của âm (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage). Một người đứng giữa hai loa A và B. Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ 80 dB. Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 90 dB. Nếu bật cả hai loa thì cường độ âm tác động vào tai người bằng tổng cường độ âm của hai loa đó.

a) Cường độ âm của loa A là  $10^{80} \cdot 10^{-12} (W/m^2)$ .

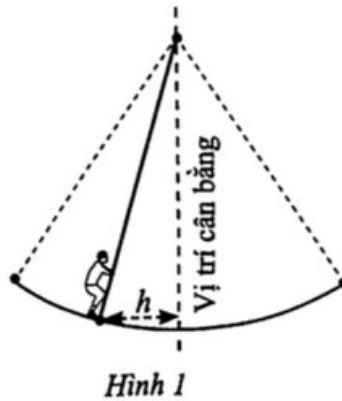
b) Cường độ âm của loa B là  $10^{90} \cdot 10^{-12} (W/m^2)$ .

c) Cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là  $10^{170} \cdot 10^{-12} (W/m^2)$ .

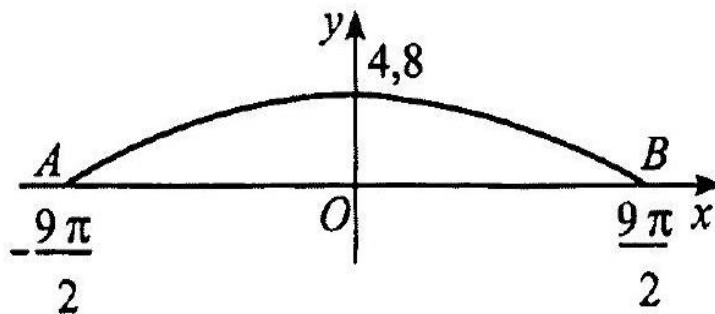
d) Nếu bật cả hai loa thì người đó nghe được âm có mức cường độ là 90,4 dB.

## Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 34.** [MD4] Mức cường Hội Lim ( tỉnh Bắc Ninh) vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 1). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách  $h$  (m) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian  $t$  (s) ( với  $t \geq 0$  ) bởi hệ thức  $h = |d|$  với  $d = 3 \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$ , trong đó ta quy ước  $d > 0$  khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và  $d < 0$  trong trường hợp ngược lại (Nguồn : R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10<sup>e</sup> Cengage*). Tìm thời điểm đầu tiên mà khoảng cách  $h$  là lớn nhất. (Viết kết quả dưới dạng số thập phân).



- Câu 35.** [MD4] Một cây cầu có dạng cung  $AB$  của đồ thị hàm số  $y = 4,8 \cos \frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình vẽ. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao  $3,6m$  so với mực nước sông. Hỏi chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là bao nhiêu mét để sà lan có thể đi qua được gầm cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



- Câu 36.** [MD4] Trong một thí nghiệm, một quả cầu được gắn vào một đầu dây đàn hồi, đầu kia của sợi dây được gắn cố định vào một thanh treo nằm ngang. Sau khi quả cầu được kéo xuống và thả ra, nó bắt đầu di chuyển lên xuống. Khi đó, chiều cao  $h$  (cm) của quả cầu so với mặt đất theo thời gian  $t$  (s) được cho bởi công thức  $h = 100 - 30 \cos 20t$ . Tính thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 37.** [MD4] Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của một chiếc ô tô giảm đi 6% so với năm trước đó. Giả sử một chiếc ô tô lúc mới mua là 800 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

- Câu 38. [MĐ4]** Các nhà khoa học xác định được chu kỳ bán rã của  $^{14}_6\text{C}$  là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử  $^{14}_6\text{C}$  giảm đi một nửa. Một cây còn sống có lượng  $^{14}_6\text{C}$  trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng  $^{14}_6\text{C}$  trong cây phân rã theo chu kỳ bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ và đo được tỉ lệ phần trăm lượng  $^{14}_6\text{C}$  còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là 75%. Hỏi mẫu gỗ cổ đó đã chết cách đây bao nhiêu năm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Câu 39. [MĐ4]** Cô Liên gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Liên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

## CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. CẤP SỐ CỘNG

##### 1. Định nghĩa

Dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng nếu  $u_n = u_{n-1} + d$  với  $n \geq 2$ ,  $d$  là số không đổi.

Số  $d$  gọi là công sai của cấp số cộng,  $d = u_n - u_{n-1}$  với  $n \geq 2$ .

Nếu  $d = 0$  thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

##### 2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$ , ta có:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

##### 3. Tổng $n$ số hạng đầu

Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , ta có:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

### II. CẤP SỐ NHÂN

#### 1. Định nghĩa

Dãy số  $(u_n)$  là cấp số nhân nếu  $u_n = u_{n-1} \cdot q$  với  $n \geq 2$ ,  $q$  là số không đổi.

Số  $q$  gọi là công bội của cấp số nhân. Nếu  $u_n \neq 0$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  thì

$$q = \frac{u_n}{u_{n-1}} \text{ với } n \geq 2.$$

Nếu  $q = 1$  thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

#### 2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$ , ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

#### 3. Tổng $n$ số hạng đầu

Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q (q \neq 1)$ .

Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , ta có:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

### C. BÀI TẬP

#### Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1. (MĐ1)** Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. 2; 0; -2; -4; -5.

B.  $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}$ .

C.  $\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}$ .

D.  $-7; -4; -1; 2; 5$ .

**Câu 2. (MĐ2)** Trong các dãy số  $(u_n)$  với số hạng tổng quát sau, dãy nào là cấp số cộng?

A.  $u_n = 3 \cdot 2^n$ .

B.  $u_n = 3 - 2n$ .

C.  $u_n = 2^n + 3$ .

D.  $u_n = 2 + n^3$ .

**Câu 3. (MĐ2)** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  biết  $u_3 = -2; u_7 = 18$ . Số hạng  $u_{11}$  bằng:

A. 38.

B. 20.

C. 43.

D. 33.

**Câu 4. (MĐ3)** Cho  $(u_n)$  là cấp số cộng có  $u_4 + u_{16} = 48$ . Số hạng  $u_{10}$  bằng:

A. 48.

B. 24.

C. 96.

D. 72.

**Câu 5. (MĐ3)** Cho  $(u_n)$  là cấp số cộng có  $u_9 = 5u_2$  và  $u_{13} = 2u_6 + 5$ . Số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  của cấp số cộng đó là:

A.  $u_1 = -3; d = 4$ .

B.  $u_1 = 3; d = 4$ .

C.  $u_1 = 4; d = 3$ .

D.  $u_1 = -4; d = 3$ .

**Câu 6. (MĐ3)** Một cấp số cộng có số hạng đầu  $u_1 = \frac{1}{3}$ , công sai  $d = -1$ . Tổng  $n$  số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng  $-425$ . Giá trị của  $n$  bằng:

A. 30.

B. 60.

C. 45.

D. 15.

**Câu 7. (MĐ3)** Cho  $(u_n)$  là cấp số cộng có  $u_2 + u_9 = 15$ . Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng:

A. 150.

B. 75.

C. 120.

D. 90.

**Câu 8. (MĐ3)** Cho  $(u_n)$  là cấp số cộng. Gọi  $S_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số đó. Biết  $S_{10} = 365; S_{15} = 435$ . Công thức của số hạng tổng quát  $u_n$  là:

A.  $u_n = 50 - 3n$ .

B.  $u_n = 53 + 3n$ .

C.  $u_n = 50 + 3n$ .

D.  $u_n = 53 - 3n$ .

**Câu 9. (MĐ1)** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  là cấp số cộng. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $(u_n)$  không phải là cấp số nhân.

B.  $(u_n)$  là cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = 3$  công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

C.  $(u_n)$  là cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = \frac{3}{4}$  công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

D.  $(u_n)$  là cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = \frac{3}{2}$  công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

**Câu 10. (MĐ3)** Trong các dãy số  $(u_n)$  với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A.  $u_n = \frac{1}{5^n} - 1$ .

B.  $u_n = \frac{1}{5}n - 1$ .

C.  $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ .

D.  $u_n = \frac{1}{5n-1}$ .

**Câu 11. (MĐ3)** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = -1$  và công bội  $q = -\frac{1}{10}$ . Số  $-\frac{1}{10^{2024}}$  là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. Số hạng thứ 2024.

B. Số hạng thứ 2025.

C. Số hạng thứ 2023.

D. Số hạng thứ 2026.

**Câu 12. (MĐ3)** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = \frac{1}{3}; u_4 = -9$ . Công bội  $q$  của cấp số nhân là:

A.  $\frac{1}{3}$ .

B.  $-\frac{1}{3}$ .

C.  $-3$ .

D.  $3$ .

**Câu 13. (MĐ3)** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_1 = 2$  và  $u_n = \frac{1}{2} \cdot u_{n-1}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Số hạng tổng quát của dãy số là:

A.  $u_n = \frac{1}{2^{n-2}}$ .

B.  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

C.  $u_n = \frac{1}{2^n}$ .

D.  $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ .

**Câu 14. (MĐ3)** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  biết  $u_2 \cdot u_5 = -243$ . Tích  $u_3 \cdot u_4$  bằng:

- A. -81.                      B. -243.                      C. 81.                      D. 243.

**Câu 15. (MĐ2)** Cho  $(u_n)$  là cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = -3$ , công bội  $q = -2$ . Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là:

- A. 1023.                      B. -1025.                      C. 1025.                      D. -1023.

**Câu 16. (MĐ3)** Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng:

- A.  $243^\circ$ .                      B.  $252^\circ$ .                      C.  $102^\circ$ .                      D.  $168^\circ$ .

**Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai**

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 17.** Cho dãy số  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu được tính bởi công thức  $S_n = n^2 - \frac{3}{2}n$ .

- a) Ta có:  $S_1 = -\frac{1}{2}; S_2 = 1$ .  
 b) Số hạng thứ hai của dãy số là  $u_2 = 1$ .  
 c) Số hạng tổng quát của dãy số là  $u_n = -\frac{5}{2} + 2n$ .  
 d) Dãy số  $(u_n)$  là một cấp số cộng có công sai là 2.

**Câu 18.** Cho dãy số  $(u_n)$  biết  $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Đặt  $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a)  $v_1 = 3$ .  
 b) Dãy số  $(v_n)$  là một cấp số cộng có công sai  $d = 4$ .  
 c) Công thức của số hạng tổng quát  $v_n$  là  $v_n = 7 - 4n$ .  
 d) Công thức của số hạng tổng quát  $u_n$  là  $u_n = \frac{2}{7-4n}$ .

**Câu 19.** Cho dãy số  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu được tính bởi công thức:  $S_n = \frac{1-3^n}{2 \cdot 3^{n-2}}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Số hạng thứ nhất của dãy số là  $u_1 = -3$ .  
 b) Số hạng thứ hai của dãy số là  $u_2 = -4$ .  
 c) Số hạng tổng quát của dãy số là  $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ .  
 d) Dãy số  $(u_n)$  là một cấp số nhân có công bội là  $-\frac{1}{3}$ .

**Câu 20.** Cho dãy số  $(u_n)$ , biết  $u_1 = -17, u_{n+1} = 5u_n - 12$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Đặt  $v_n = \frac{3-u_n}{2}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a)  $v_1 = 10$ .  
 b) Dãy số  $(v_n)$  là một cấp số nhân có công bội bằng  $\frac{1}{5}$ .  
 c) Công thức của số hạng tổng quát  $v_n$  là  $v_n = \frac{2}{5^n}$ .  
 d) Công thức của số hạng tổng quát  $u_n$  là  $u_n = 3 - 4 \cdot 5^n$ .

**Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

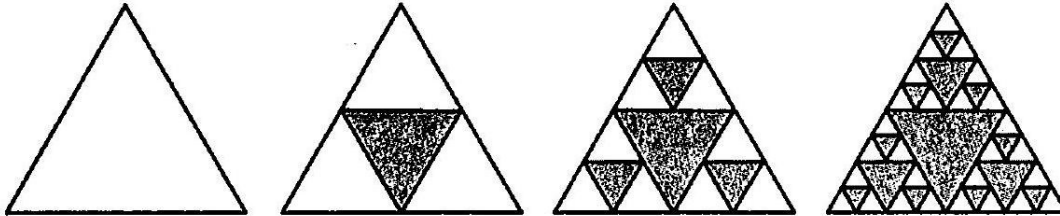
**Câu 21.** Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 30 ghế, hàng thứ hai có 31 ghế, hàng thứ ba có 32 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 63200000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: nghìn đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

**Câu 22.** Cho tập hợp  $A$  gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau  $A = \{1; 2; 3; \dots; 99\}$ . Tìm số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp  $A$  để ba số đó lập thành cấp số cộng.

**Câu 23.** Anh Minh kí hợp đồng lao động có thời hạn ở một công ty với phương án trả lương như sau: Quý thứ nhất, tiền lương là 27 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 2,1 triệu. Tổng số tiền lương anh nhận được trong các năm đã đi làm là 684 triệu đồng. Hỏi anh Minh đã làm ở công ty đó bao nhiêu năm?

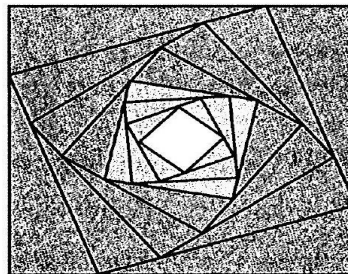
**Câu 24.** Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao 10 m rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

**Câu 25.** Một tam giác đều có cạnh bằng 4 cm. Chia tam giác đều đó thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Với mỗi tam giác nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm (Hình 1). Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ 5 (đơn vị:  $\text{cm}^2$ , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1

**Câu 26.** Cho hình vuông  $C_1$  có cạnh bằng 4 cm. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông  $C_1$  thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông  $C_2$ . Từ hình vuông  $C_2$  lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông  $C_3$ . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  như Hình dưới. Tính diện tích của hình vuông thứ 6 (đơn vị:  $\text{cm}^2$ , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



## HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

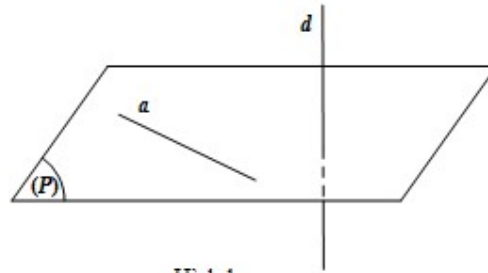
##### 1. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ , kí hiệu  $a \perp b$ .

##### 2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

###### a) Định nghĩa

Đường thẳng  $d$  được gọi là vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  nếu đường thẳng  $d$  vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng  $(P)$  (Hình 1), kí hiệu  $d \perp (P)$  hoặc  $(P) \perp d$ .



Hình 1

**b) Dấu hiệu nhận biết**

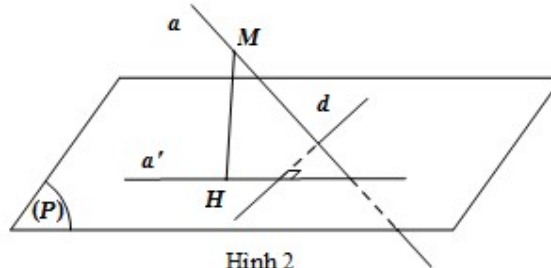
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

**c) Tính chất**

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước
- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**d) Định lí ba đường vuông góc**

Cho đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $d$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$ . Khi đó,  $d$  vuông góc với  $a$  khi và chỉ khi  $d$  vuông góc với hình chiếu vuông góc  $a'$  của  $a$  trên  $(P)$  (Hình 2).



Hình 2

**3. Hai mặt phẳng vuông góc**

**a) Định nghĩa**

Hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu  $(P) \perp (Q)$ .

**b) Dấu hiệu nhận biết**

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

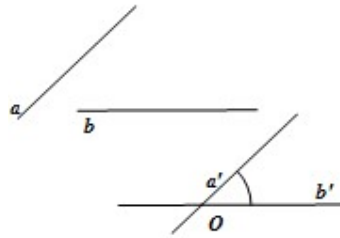
**c) Tính chất**

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

**II. GÓC TRONG KHÔNG GIAN**

**1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian**

Góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  trong không gian là góc giữa hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$  cùng đi qua một điểm  $O$  và lần lượt song song (hoặc trùng) với  $a$  và  $b$  (Hình 3), kí hiệu  $(a, b)$  hoặc  $\widehat{(a, b)}$ .



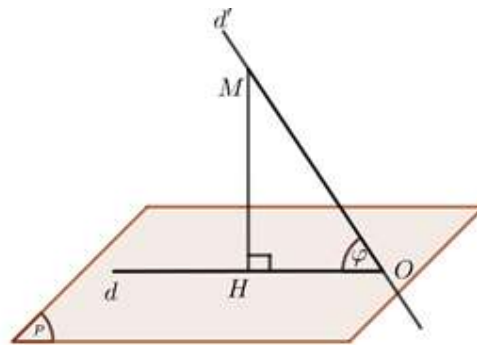
Hình 3

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian có số đo từ  $0^\circ$  đến  $90^\circ$ .

## 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ , ta có định nghĩa sau:

- Nếu đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  thì góc giữa  $d$  và  $(P)$  bằng  $90^\circ$ .
- Nếu đường thẳng  $d$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  thì góc giữa đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$  là góc giữa  $d$  và hình chiếu  $d'$  của đường thẳng  $d$  trên  $(P)$  (Hình 4), kí hiệu  $(d, (P))$ .

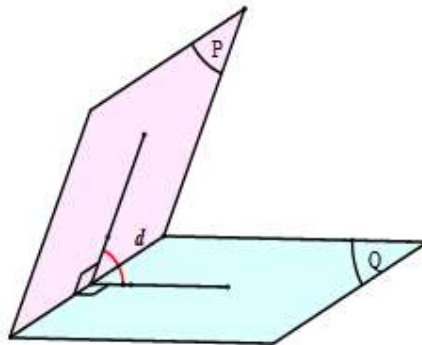


Hình 4

Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ  $0^\circ$  đến  $90^\circ$ .

## 3. Góc nhị diện

- Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ; kí hiệu  $[P, d, Q]$  hoặc  $[M, d, N]$ , trong đó  $(P), (Q)$  là hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng  $d$  và  $M, N$  là các điểm lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng  $(P), (Q)$ . Đường thẳng  $d$  gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng  $(P), (Q)$  gọi là một mặt của góc nhị diện.



Cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.

- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng  $90^\circ$  thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

Nhận xét: Góc nhị diện có số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ .

## III. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

### 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $\Delta$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  trên  $\Delta$ , kí hiệu  $d(M, \Delta)$ .

## 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  trên  $(P)$ , kí hiệu  $d(M, (P))$ .

## 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta$  và  $\Delta'$  là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu  $d(\Delta, \Delta')$ .

## 4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng  $\Delta$  song song với mặt phẳng  $(P)$ . Khoảng cách giữa đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$  là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng  $\Delta$  đến mặt phẳng  $(P)$ , kí hiệu  $d(\Delta, (P))$ .

## 5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$  là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu  $d((P), (Q))$ .

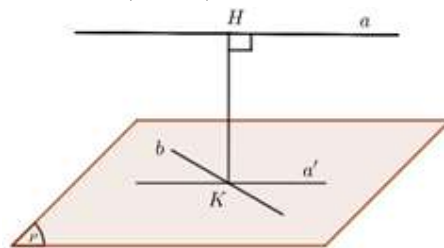
## 6. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

Cho hai đường thẳng  $a, b$  chéo nhau.

- Có và chỉ có một đường thẳng  $c$  vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng  $a, b$ , gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng  $c$  với hai đường thẳng  $a, b$  gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $a, b$  gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu  $d(a, b)$ .

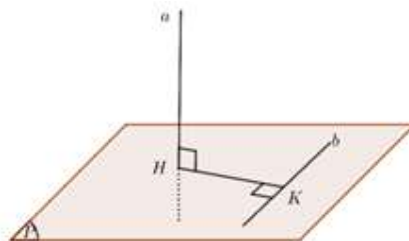
### Nhận xét

- Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $b$  và song song với  $a$ , hình chiếu của  $a$  trên  $(P)$  là  $a'$ , giao điểm của  $a'$  và  $b$  là  $K$ , hình chiếu của  $K$  trên  $a$  là  $H$  (Hình 6). Khi đó  $HK$  là đoạn vuông góc chung của  $a$  và  $b$ . Ngoài ra,  $d(a, b) = HK = d(a, (P))$ .



Hình 6

Trong trường hợp đặc biệt  $ab$ , ta có thể xác định như sau: Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $b$  và vuông góc với  $a$ , giao điểm của  $a$  và  $(P)$  là  $H$ , hình chiếu của  $H$  trên  $b$  là  $K$  (Hình 7). Khi đó,  $HK$  là đoạn vuông góc chung của  $a$  và  $b$ .



Hình 7

## IV. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN

- Công thức tính thể tích của khối lăng trụ:  $V = Sh$ .

Trong đó  $V, S, h$  lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

- Công thức tính thể tích của khối chóp:  $V = \frac{1}{3}Sh$ .

Trong đó  $V, S, h$  lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

- Công thức tính thể tích của khối chóp cụt đều:  $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$ .

Trong đó  $V, h, S_1, S_2$  lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

## B. BÀI TẬP

### Dạng 1: Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1. [MĐ1]** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông và  $SD \perp (ABCD)$ . Đường thẳng  $AC$  vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- A.  $(SAB)$ . B.  $(SAD)$ . C.  $(SCD)$ . D.  $(SBD)$ .

**Câu 2. [MĐ2]** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  là trung điểm  $AD$ . Góc nào sau đây là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[B, AD, S]$ ?

- A.  $\widehat{SAB}$ . B.  $\widehat{SDB}$ . C.  $\widehat{SMO}$ . D.  $\widehat{SMB}$ .

**Câu 3. [MĐ1]** Cho đường thẳng  $a$  và hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  vuông góc với nhau. Phát biểu nào sau đây là đúng về đường thẳng  $a$ ?

A. Đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong  $(Q)$ .

B. Đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  thì vuông góc với giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$ .

C. Đường thẳng  $a$  vuông góc với mặt phẳng  $(Q)$  thì  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$

D. Đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  và vuông góc với giao tuyến của  $(P), (Q)$  thì  $a$  vuông góc với mặt phẳng  $(Q)$ .

song với  $(P)$

**Câu 4. [MĐ2]** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'B$  bằng:

- A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 5. [MĐ3]** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Góc giữa đường thẳng  $SA$  với mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng:

- A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 6. [MĐ2]** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy bằng:

- A.  $a$ . B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . C.  $a\sqrt{2}$ . D.  $\frac{a}{2}$ .

**Câu 7. [MĐ3]** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AA' = 2a$ ,  $A'B' = 2a$ ,  $A'D' = a$ .

Khoảng cách từ đường thẳng  $AA'$  đến mặt phẳng  $(BDD'B')$  bằng:

- A.  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ . B.  $a\sqrt{2}$ . C.  $\frac{a}{2}$ . D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 8. [MĐ2]** Cho khối chóp có diện tích đáy là  $3a^2$  và chiều cao là  $a$ . Thể tích của khối chóp đó bằng:

- A.  $3a^3$ . B.  $a^3$ . C.  $\frac{a^3}{3}$ . D.  $9a^3$ .

**Câu 9. [MĐ1]** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là  $3a^2$  và chiều cao là  $a$ . Thể tích của khối lăng trụ đó bằng:

- A.  $3a^3$ . B.  $a^3$ . C.  $\frac{a^3}{3}$ . D.  $9a^3$ .

### Dạng 2: Trắc nghiệm đúng-sai

Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

a)  $SH \perp (ABCD)$ .

b) Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $\widehat{SCA}$ .

c)  $CH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

d) Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ . Giá trị  $\cos\alpha$  bằng  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $AC = a$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên cạnh  $CD$ .

a)  $AH \perp CD$ .

b)  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

c) Góc  $SDC$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[S, CD, A]$ .

d) Số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$  bằng  $30^\circ$ .

**Câu 12.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $A'C'$  bằng  $45^\circ$ .

b) Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $A'C$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D)$ . Giá trị  $\tan\alpha$  bằng  $\sqrt{2}$ .

c) Gọi  $\beta$  là số đo của góc nhị diện  $[B, A'C', B']$ . Giá trị  $\tan\beta$  bằng  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

d) Số đo của góc nhị diện  $[B', A'C, D']$  bằng  $120^\circ$ .

**Câu 13.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $(A'ABB') \perp (ABC)$ ,  $AA' = 2a$ ,  $\widehat{A'AB} = 60^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A'$  trên  $AB$ .

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $A'C'$  và  $AB$  bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(A'B'C')$  và  $(ABC)$ .

b)  $A'H$  không phải là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $A'C'$  và  $AB$ .

c)  $A'H = a\sqrt{3}$ .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $A'C'$  và  $AB$  bằng  $a$ .

**Câu 14.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DD'$  bằng  $a$ .

b) Khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACC'A')$  bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

c) Khoảng cách từ điểm  $B$  đến đường thẳng  $A'C'$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $A'C$  bằng  $\frac{a}{2}$ .

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $3a$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ ,  $AA' = 2a$ . Đỉnh  $A'$  cách đều ba đỉnh  $A, B, C$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

a)  $A'G$  là đường cao của hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$ .

b) Độ dài đường cao của hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng  $a\sqrt{3}$ .

c) Diện tích hình thoi  $ABCD$  bằng  $\frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$ .

d) Thể tích của khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng  $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ .

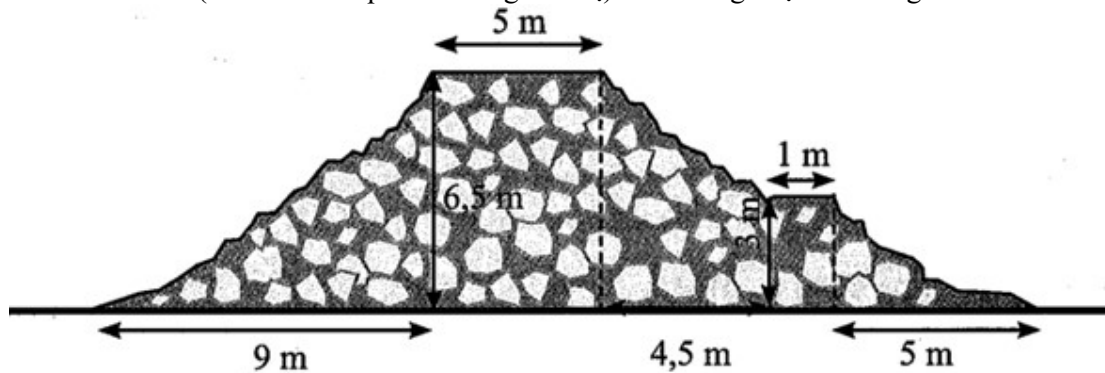
### Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 16.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $2a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Góc giữa đường thẳng  $BM$  với mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng bao nhiêu độ?

**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết rằng  $SO \perp (ABCD)$ ,  $SO = \frac{3a}{4}$ . Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{ma}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản,  $m > 0, n > 0$ . Giá trị  $m + n$  bằng bao nhiêu?

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$  bằng  $60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$  bằng  $\frac{a\sqrt{30}}{n}$ . Tìm giá trị của  $n$ .

**Câu 19.** Người ta cần xây dựng công trình đê đê ngăn nước lũ của sông. Mặt cắt của đê được thiết kế với số đo như trong hình vẽ. Tổng thể tích vật liệu cần dùng để xây dựng đoạn đê đó bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng đoạn đê thẳng và dài 100 m.



## Chủ đề 8. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### I. NGUYÊN HÀM

##### 1. Định nghĩa

Cho  $K$  là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực  $\mathbb{R}$ .

□□ Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $K$ .

•□ Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì mọi nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  đều có dạng  $F(x) + C$  với  $C$  là một hằng số. Vì vậy,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

□□ Mọi hàm số liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ . Ta có:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

##### 2. Tính chất

Cho  $f(x), g(x)$  là hai hàm số liên tục trên  $K$ .

$\square\square \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$  với  $k$  là hằng số khác 0;

$\square\square \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$

$\square\square \int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

**3. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản**

$\square\square$  Với  $\alpha \neq -1$ , ta có:  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$

$\square\square \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

$\square\square \int \sin x dx = -\cos x + C;$

$\square\square \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C;$

$\square\square \int \cos x dx = \sin x + C;$

$\square\square \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$

$\square\square$  Với  $a > 0, a \neq 1$ , ta có:  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

**II. TÍCH PHÂN**

**1. Định nghĩa**

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .

Khi đó  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

**2. Tính chất**

Cho các hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Ta có:

$\square\square \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$  ( $k$  là hằng số).

$\square\square \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\square\square \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

$\square\square$  Giả sử  $m, n, c$  là ba số thực tùy ý thuộc đoạn  $[a; b]$ , ta có:

$$\int_m^n f(x)dx = \int_m^c f(x)dx + \int_c^n f(x)dx$$

**3. Tích phân một số hàm số sơ cấp cơ bản**

$\square\square$  Với  $\alpha \neq -1$ , ta có:  $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1};$

$\square\square$  Với hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ , ta có:

$\square\square \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|;$

$$\square\square \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b;$$

$$\square\square \int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a;$$

$\square\square$  Với hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$  liên tục trên  $[a; b]$ , ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x \Big|_a^b = \cot a - \cot b;$$

$\square\square$  Với hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  liên tục trên  $[a; b]$ , ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_a^b = \tan b - \tan a;$$

$\square\square$  Với  $a > 0, a \neq 1$ , ta có  $\int_a^\beta a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \Big|_a^\beta = \frac{a^\beta - a^a}{\ln a}$ .

#### 4. Ứng dụng

$\square\square$  Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó, diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

$\square\square$  Cho các hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

$\square\square$  Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với  $Ox$  tại  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là  $S(x)$ . Giả sử hàm số  $S(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó, thể tích  $V$  của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$\square\square$  Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a; b]$ . Hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục  $Ox$  tạo thành một

khối tròn xoay có thể tích bằng  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

#### B. BÀI TẬP

##### Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

**A.**  $\int F'(x) dx = F(x) + C.$

**B.**  $\int F(x) dx = F'(x) + C.$

C.  $\int F(x)dx = F(x) + C.$

D.  $\int F'(x)dx = F'(x) + C.$

**Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A.  $\int e^{-3x} dx = e^{-3x} + C.$

B.  $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$

C.  $\int e^{-3x} dx = \frac{1}{3}e^{-3x} + C.$

D.  $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}.$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ). Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành là:

A.  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

B.  $V = 2\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

C.  $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

D.

$V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

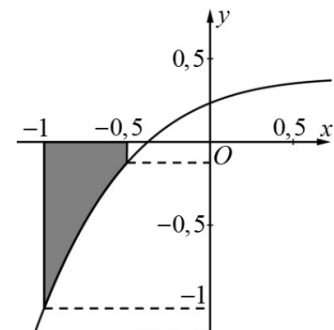
**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như Hình 2. Gọi  $S$  là phần diện tích hình phẳng được tô màu. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A.  $S = \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx.$

B.  $S = -\int_{-1}^0 f(x) dx.$

C.  $S = -\left| \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx \right|.$

D.  $S = -\int_{-1}^{-0,5} f(x) dx.$



Hình 2

**Câu 5.** Gọi  $H$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 4$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $H$  quay quanh trục  $Ox$  là:

A.  $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x} dx.$

B.  $V = \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx.$

C.  $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx.$

D.  $V = \pi^2 \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx.$

**Câu 6.** Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -\sin x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = \pi$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $D$  quay xung quanh trục  $Ox$  là:

A.  $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$

B.  $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

C.  $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$

D.

$V = \pi^2 \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

**Câu 7.** Gọi  $H$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 2$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $H$  quay xung quanh trục  $Ox$  là:

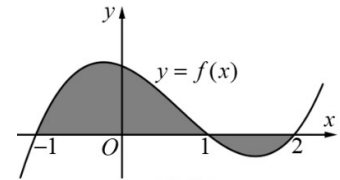
A.  $V = \pi \int_1^2 \sqrt{x} dx.$

B.  $V = \pi^2 \int_0^\pi x dx.$

C.  $V = \pi^2 \int_1^2 \sqrt{x} dx.$

D.  $V = \pi \int_1^2 x dx.$

**Câu 8.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng được tô đậm trong Hình 3. Công thức tính  $S$  là:



Hình 3

A.  $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

B.  $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

C.  $S = \int_{-1}^2 f(x)dx.$

D.  $S = -\int_{-1}^2 f(x)dx.$

**Câu 9.**  $\int (2x)^{\sqrt{2}} dx$  bằng:

A.  $\frac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$

B.  $\frac{2^{\sqrt{2}} x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$

C.  $\frac{(2x)^{\sqrt{2}}}{\ln(2x)} + C.$

D.  $(2x)^{\sqrt{2}} + C.$

**Câu 10.**  $\int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$  bằng:

A.  $x - \cos x + C.$

B.  $\left( -\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 + C.$

C.  $\frac{1}{3} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^3 + C.$

D.  $x + \cos x + C.$

**Câu 11.**  $\int (e^x + e^{-2x}) dx$  bằng:

A.  $e^x - 2e^{-2x} + C.$

B.  $e^x + e^{-2x} + C.$

C.  $e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

D.

$\frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{e^{-2x+1}}{-2x+1} + C.$

**Câu 12.**  $\int \left( \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$  bằng:

A.  $x + \sin x + C.$

B.  $\frac{1}{3} \left( \cos \frac{x}{2} \right)^3 + C.$

C.  $\left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 + C.$

D.

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

**Câu 13.**  $\int \left( 5^{2x} - 6e^{-\frac{x}{2}} \right) dx$  bằng:

A.  $e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

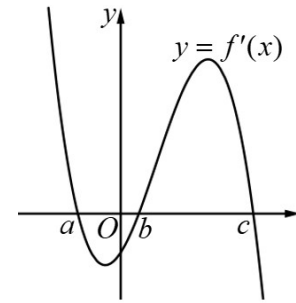
B.  $\frac{25^x}{2 \ln 5} + 12e^{-\frac{x}{2}} + C.$

C.  $e^x - 2e^{-2x} + C.$

D.

$\frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{e^{-2x+1}}{-2x+1} + C.$

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  cắt trục  $Ox$  tại ba điểm có hoành độ  $a < b < c$  như Hình 4. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



Hình 4

- A.  $f(c) > f(a) > f(b)$ .
- B.  $f(c) > f(b) > f(a)$ .
- C.  $f(a) > f(b) > f(c)$ .
- D.  $f(b) > f(a) > f(c)$ .

**Câu 15.** Vi khuẩn *E.coli* sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một quần thể vi khuẩn *E.coli* được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh trưởng được cho bởi hàm số  $f(t) = 480.2^t \ln 2$ . Trong đó  $t$  tính bằng giờ ( $t > 0$ ),  $f(t)$  tính bằng cá thể/giờ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage). Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hàm số biểu thị số lượng cá thể theo thời gian  $t$  là:

- A.  $F(t) = 480.2^t + \ln 2$ .
- B.  $F(t) = 480.2^t + C$ .
- C.  $F(t) = 480. \frac{2^t}{\ln 2}$ .
- D.

$$F(t) = 480. \frac{2^t}{\ln 2} + C.$$

**Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai**

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 16.** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

- a)  $\int f(x)dx = f'(x) + C$ .
- b)  $\int f'(x)dx = f(x) + C$ .
- c)  $\int f''(x)dx = f(x)$ .
- d)  $\int f''(x)dx = f'(x) + C$ .

**Câu 17.** Giả sử  $v(t)$  là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian  $t$  (giây),  $a(t)$  là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian  $t$  (giây).

- a)  $\int a(t)dt = v(t) + C$ .
- b)  $\int v(t)dt = a(t) + C$ .
- c)  $\int v'(t)dt = a(t) + C$ .
- d)  $\int v'(t)dt = v(t) + C$ .

**Câu 18.** Giả sử  $v(t)$  là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian  $t$  (giây),  $a(t)$  là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian  $t$  (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ  $c$  (giây) đến  $b$  (giây).

- a)  $\int_c^b a(t)dt = v(b) - v(c)$
- b)  $\int_c^b v(t)dt = a(b) - a(c)$ .

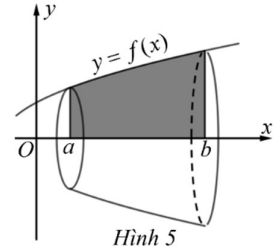
c)  $\int_c^b v'(t)dt = v(c) - v(b)$

d)  $\int_c^b v'(t)dt = v(b) - v(c)$

**Câu 19.** Cho vật thể tròn xoay như ở Hình 5.

a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục  $Ox$ .

b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục  $Ox$ .



c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức  $V = \pi \int_a^b f(x)dx$ .

d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

**Câu 20.** Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số  $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$ , trong đó  $t$  tính bằng giờ ( $0 \leq t \leq 13$ ),  $Q'(t)$  tính bằng khách/giờ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số  $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$ .

b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm  $t = 6$ .

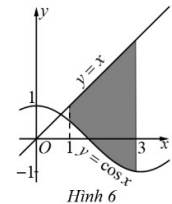
**Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 21.**  $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx$  có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

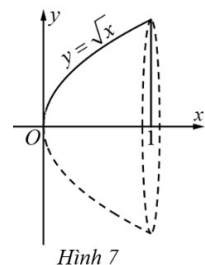
**Câu 22.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$  và  $F(-1) = \frac{1}{6}$ .

Tính  $F\left(-\frac{1}{2}\right)$  (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

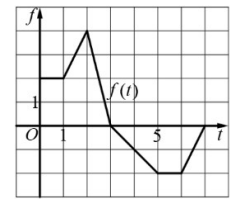
**Câu 23.** Cho đồ thị hàm số  $y = \cos x$  và hình phẳng được tô màu như Hình 6. Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



**Câu 24.** Cho khối tròn xoay như Hình 7. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở Hình 7 khi quay quanh trục  $Ox$  (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



**Câu 25.** Cho  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ , ( $0 \leq x \leq 7$ ) trong đó  $f(t)$  là hàm số có đồ thị như



Hình 8. Tính  $g(3)$ .

**Câu 26.** Một vật được ném lên từ độ cao 300m với vận tốc được cho bởi công thức  $v(t) = -9,81t + 29,43$  (m/s) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus ioe, Cengage). Gọi  $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm  $t$  (s). Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

**Câu 27.** Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm  $x$  (triệu đồng) ( $x \geq 0$ ). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số  $T'(x) = -20x + 300$ , trong đó  $T'(x)$  tính bằng triệu đồng (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus ioe, Cengage). Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Tìm giá trị của  $x$  để người đó có doanh thu là cao nhất?

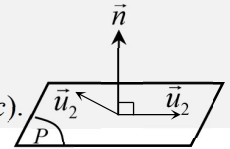
## CHUYÊN ĐỀ 9

### PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

#### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

##### Dạng 1. Xác định vectơ pháp tuyến

- Vectơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của mặt phẳng  $(P)$  là vectơ có giá vuông góc với  $(P)$ . Nếu  $\vec{n}$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$  thì  $k\vec{n}$  cũng là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .
- Nếu mặt phẳng  $(P)$  có cặp vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  thì  $(P)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ .
- Mặt phẳng  $(P): ax + by + cz + d = 0$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (a; b; c)$ .



##### Dạng 2. Xác định phương trình mặt phẳng

- Mặt phẳng  $(P)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (a; b; c) \end{array} \right.$  thì phương trình  $(P): \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$  (\*)

- Các mặt phẳng cơ bản

$$\begin{array}{l} mp(Oyz): x = 0 \xrightarrow{VTPT} \vec{n}_{(Oyz)} = (1; 0; 0) \\ mp(Oxz): y = 0 \xrightarrow{VTPT} \vec{n}_{(Oxz)} = (0; 1; 0) \\ mp(Oxy): z = 0 \xrightarrow{VTPT} \vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1) \end{array}$$

##### Dạng 3. Điểm thuộc mặt phẳng

Một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng  $(P): ax + by + cz + d = 0$ , và điểm  $M(x_M; y_M; z_M)$ .

$$\text{Nếu } ax_M + by_M + cz_M + d = 0 \Rightarrow M \in (P)$$

$$\text{Nếu } ax_M + by_M + cz_M + d \neq 0 \Rightarrow M \notin (P)$$

##### Dạng 4. Điều kiện song song và vuông góc của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng  $(P_1), (P_2)$  lần lượt có phương trình tổng quát là:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  Gọi  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng  $(P_1), (P_2)$ .

$$+ (P_1) // (P_2) \Leftrightarrow \text{Tồn tại số thực } k \neq 0 \text{ sao cho } \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$$

$$+ (P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

##### Dạng 5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  ( $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ )

được tính theo công thức:  $d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

**B. BÀI TẬP**

**I. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 3x - z + 2 = 0$ . Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ ?

- A.  $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$       B.  $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$       C.  $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$       D.  
 $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$  có một vectơ pháp tuyến là:

- A.  $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$       B.  $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$       C.  $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$       D.  $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$ . Điểm nào dưới đây không thuộc  $(\alpha)$ ?

- A.  $Q(3; 3; 0)$       B.  $N(2; 2; 2)$       C.  $P(1; 2; 3)$       D.  $M(1; -1; 1)$

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + z - 5 = 0$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $(P)$ ?

- A.  $P(0; 0; -5)$       B.  $M(1; 1; 6)$       C.  $Q(2; -1; 5)$       D.  $N(-5; 0; 0)$

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(Oxz)$  có phương trình là:

- A.  $x = 0$       B.  $z = 0$       C.  $x + y + z = 0$       D.  $y = 0$

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng  $(Oyz)$ ?

- A.  $y = 0$       B.  $x = 0$       C.  $y - z = 0$       D.  $z = 0$

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(Oyz)$  có phương trình là

- A.  $z = 0$ .      B.  $x + y + z = 0$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $y = 0$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng  $Ozx$ ?

- A.  $x = 0$ .      B.  $y - 1 = 0$ .      C.  $y = 0$ .      D.  $z = 0$ .

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M(1; 2; -3)$  và có một vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; -2; 3)$ .

- A.  $x - 2y + 3z + 12 = 0$       B.  $x - 2y - 3z - 6 = 0$       C.  $x - 2y + 3z - 12 = 0$       D.  
 $x - 2y - 3z + 6 = 0$

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 1)$  và  $B(1; 2; 3)$ . Viết phương trình của mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$ .

- A.  $x + y + 2z - 3 = 0$       B.  $x + y + 2z - 6 = 0$       C.  $x + 3y + 4z - 7 = 0$       D.  
 $x + 3y + 4z - 26 = 0$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 0; 1)$  và  $B(-2; 2; 3)$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$  có phương trình là

- A.  $3x - y - z = 0$ .      B.  $3x + y + z - 6 = 0$ .      C.  $x + y + 2z - 6 = 0$ .      D.  $6x - 2y - 2z - 1 = 0$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $A(5; -4; 2)$  và  $B(1; 2; 4)$ . Mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  là?

- A.  $3x - y + 3z - 25 = 0$       B.  $2x - 3y - z + 8 = 0$       C.  $3x - y + 3z - 13 = 0$       D.  
 $2x - 3y - z - 20 = 0$

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(3; -1; 4)$  đồng thời vuông góc với giá của vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$  có phương trình là

- A.  $3x - y + 4z - 12 = 0$ . B.  $3x - y + 4z + 12 = 0$ . C.  $x - y + 2z - 12 = 0$ . D.  $x - y + 2z + 12 = 0$ .

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(3; -1; -2)$  và mặt phẳng  $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với  $(\alpha)$ ?

- A.  $3x - y + 2z - 6 = 0$  B.  $3x - y + 2z + 6 = 0$  C.  $3x - y - 2z + 6 = 0$  D.  $3x + y + 2z - 14 = 0$

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng đi qua điểm  $A(2; -1; 2)$  và song song với mặt phẳng  $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$  có phương trình là

- A.  $2x - y + 3z + 11 = 0$  B.  $2x - y - 3z + 11 = 0$  C.  $2x - y + 3z - 11 = 0$  D.  $2x + y + 3z - 9 = 0$

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $3x + 4y + 2z + 4 = 0$  và điểm  $A(1; -2; 3)$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $A$  đến  $(P)$

- A.  $d = \frac{5}{29}$  B.  $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$  C.  $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$  D.  $d = \frac{5}{9}$

**Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình:  $3x + 4y + 2z + 4 = 0$  và điểm  $A(1; -2; 3)$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $A$  đến  $(P)$ .

- A.  $d = \frac{5}{9}$ . B.  $d = \frac{5}{29}$ . C.  $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ . D.  $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $H(2; 1; 2)$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  xuống mặt phẳng  $(P)$ , số đo góc giữa mặt  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q): x + y - 11 = 0$

- A.  $60^0$  B.  $30^0$  C.  $45^0$  D.  $90^0$

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $x - 2y + 2z - 5 = 0$ . Xét mặt phẳng  $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$ , với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của  $m$  để  $(P)$  tạo với  $(Q)$  góc  $\frac{\pi}{4}$ .

- A.  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$ . C.  $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$ . D.  $\begin{cases} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{cases}$ .

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 7)$  và  $C(0; 3; 0)$ . Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là

- A.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} + \frac{z}{3} = 1$  B.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 0$  C.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 1$  D.  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} + 1 = 0$

## II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 10.** Trong không gian cho hệ tọa độ  $Oxyz$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Mặt phẳng  $(Oxy)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (0; 0; 1)$ .  
 B. Mặt phẳng  $(Oxz)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (0; 3; 0)$ .  
 C. Mặt phẳng  $(Oyz)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-2; 0; 0)$ .  
 D. Trục  $Oz$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{a} = (0; 0; -2024)$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + 3y + z - 2024 = 0$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Mặt phẳng  $(P)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (2; 3; 1)$ .
- B. Mặt phẳng  $(Oxz)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (6; 9; 3)$ .
- C. Mặt phẳng  $(Oyz)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-4; -6; -2)$ .
- D. Điểm  $M(0; 0; 2024)$  không thuộc mặt phẳng  $(P)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + y + z - 3 = 0$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm  $M(-1; -1; -1)$  không thuộc mặt phẳng  $(P)$ .
- B. Điểm  $N(1; 1; 1)$  thuộc mặt phẳng  $(P)$ .
- C. Điểm  $K(-3; 0; 0)$  không thuộc mặt phẳng  $(P)$ .
- D. Điểm  $Q(0; 0; -3)$  thuộc mặt phẳng  $(P)$ .

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; -2; 3)$  và hai vectơ  $\vec{v} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{u} = (-2; 0; 1)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

- A.  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .
- B.  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .
- C. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $A(1; -2; 3)$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{v} = (-1; 2; 3)$  là:  $x - 2y - 3z + 4 = 0$ .
- D. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $A(1; -2; 3)$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{u} = (-2; 0; 1)$  là:  $2x - y + 1 = 0$ .

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; 0), B(4; 1; 2)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

- A.  $\vec{AB} = (3; 1; 2)$ .
- B. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với  $AB$  có phương trình là  $3x + y + 2z - 3 = 0$ .
- C. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  thì  $I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ .
- D. Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng  $AB$  có phương trình là  $3x + y + 2z - 12 = 0$ .

**Câu 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Gọi  $A, B, C$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

- A. Điểm  $A$  có tọa độ là  $A(1; 0; 0)$ .
- B. Điểm  $B$  có tọa độ là  $A(1; 2; 0)$ .
- C. Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$ .
- D. Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ .

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; 5; 2)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  lên các mặt phẳng  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

- A. Điểm  $A_1$  có tọa độ là  $A_1(3; 5; 0)$ .
- B. Phương trình mặt phẳng đi qua các điểm  $A_1, A_2, A_3$  là  $10x + 6y + 15z - 60 = 0$ .
- C. Phương trình mặt phẳng đi qua các điểm  $A_1, A_2, A_3$  là  $10x + 6y + 15z - 90 = 0$ .
- D. Phương trình mặt phẳng đi qua các điểm  $A_1, A_2, A_3$  là  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$ .

**Câu 17.** Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1;2;-1)$ ;  $B(-1;0;1)$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

A.  $\overline{AB} = (1;1;-1)$

B. Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  qua  $A, B$  và vuông góc với  $(P)$  là  $x + z = 0$ .

C. Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(P)$  là:  $d(A, (P)) = \frac{7\sqrt{6}}{6}$

D. Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  qua  $A, B$  và vuông góc với  $(P)$  là  $3x - y + z = 0$ .

### III. TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1;2;3)$ ,  $B(3;4;4)$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $2x + y + mz - 1 = 0$  bằng độ dài đoạn thẳng  $AB$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;-2;4)$ ,  $B(-3;3;-1)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$ . Xét  $M$  là điểm thay đổi thuộc  $(P)$ , Tính giá trị nhỏ nhất của  $2MA^2 + 3MB^2$

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$  và  $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$ . Với giá trị nào của  $m$  thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

**Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ , mặt phẳng  $(P)$  không qua  $O$ , song song với mặt phẳng  $(Q)$  và  $d((P), (Q)) = 1$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  là

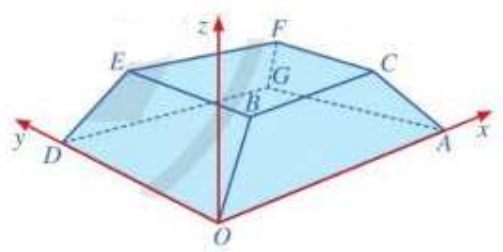
**Câu 5.** Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A(3;0;0)$ ,  $B(0;0;4)$  và song song với trục  $Oy$  có phương trình là

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1;2;3)$  và cắt các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (khác gốc tọa độ  $O$ ) sao cho  $M$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình dạng  $ax + by + cz - 14 = 0$ . Tính tổng  $T = a + b + c$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$ ,  $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa giao tuyến của  $(P), (Q)$  và cắt các trục tọa độ tại các điểm  $A, B, C$  sao cho hình chóp  $O.ABC$  là hình chóp đều.

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  là

**Câu 8.** Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt  $OAGD.BCFE$  có hai đáy song song với nhau. Mặt sân  $OAGD$  là hình chữ nhật và được gắn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân  $OAGD$  có chiều dài  $OA = 100m$ , chiều rộng  $OD = 60m$  và tọa độ điểm  $B(10;10;8)$ .



a) Lập phương trình mặt phẳng  $(OACB)$ .

b) Tính khoảng cách từ điểm  $G$  đến mặt phẳng  $(OBED)$ .

**Câu 9.** Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và có tâm của mặt đáy trên lần lượt là  $A(3; 2; 3), B(6; 3; 3), C(9; 4; 2), D\left(6; 0; \frac{5}{2}\right)$ .



- Hỏi ba cột bê tông  $A, B$  và  $C$  có được xây thẳng hàng không?
- Bốn điểm  $A, B, C$  và  $D$  có đồng phẳng không?
- Tính khoảng cách từ điểm  $D$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Câu 10.** Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường  $(P), (Q), (R), (T)$  (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình:  $(P): 2x - y - z + 1 = 0, (Q): x + 3y - z - 2 = 0, (R): 4x - 2y - 2z + 9 = 0, (T): 2x + 6y - 2z + 15 = 0$ .



- Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường  $(P), (Q), (R), (T)$  của tòa nhà.
- Tính khoảng giữa hai bức tường  $(Q)$  và  $(T)$  của tòa nhà.
- Tính chiều rộng bức tường  $(Q)$  của tòa nhà.

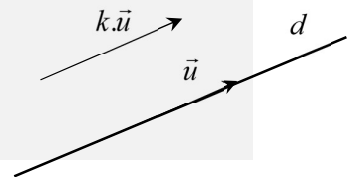
## PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

#### a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng

• Vectơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng  $d$  là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng  $d$ . Nếu  $d$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u}$  thì  $k\vec{u}$  cũng là một vectơ chỉ phương của  $d$ .

• Nếu có hai vectơ  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  cùng vuông góc với  $d$  thì  $d$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ .



#### b) Phương trình đường thẳng

• Để viết phương trình đường thẳng  $d$ , ta cần tìm điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.

Nếu đường thẳng  $d: \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$  thì ta có hai dạng phương trình đường thẳng:

Phương trình đường thẳng  $d$  dạng tham số  $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Phương trình đường thẳng  $d$  dạng chính tắc  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0).$

#### c) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng phân biệt  $\Delta_1, \Delta_2$  lần lượt đi qua các điểm  $M_1, M_2$  và tương ứng có  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$+ \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases} \quad + \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [[\vec{u}_1, \vec{u}_2], \overrightarrow{M_1M_2}] = 0 \end{cases}$$

$$+ \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

**d). Góc**

a) *Côsin của góc giữa hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có vectơ chỉ phương lần lượt là  $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ .

$$\text{Khi đó, ta có: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Nhận xét:  $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ .

b) *Sin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Cho đường thẳng  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (a_1; b_1; c_1)$  và mặt phẳng  $(P)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$ . Khi đó, ta có:

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

c) *Côsin của góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng  $(P_1)$  và  $(P_2)$  có vectơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .

Khi đó, ta có:

$$\cos((\vec{n}_1), (\vec{n}_2)) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

**B. BÀI TẬP**

**I. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN**

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(3; -1; 4)$  và có một vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (-2; 4; 5)$ . Phương trình của  $d$  là:

$$\text{A. } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -1; 2)$  và có một vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; 3; 4)$ . Phương trình của  $d$  là:

$$\text{A. } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4} \quad \text{B. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{2} \\ \text{C. } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{D. } \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$$

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}$  vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của  $d$

$$\text{A. } \vec{u}(2; 3; 0). \quad \text{B. } \vec{u}(1; -1; 2). \quad \text{C. } \vec{u}(1; 1; 2). \quad \text{D. } \vec{u}(1; 1; -2).$$

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$  vec tơ nào sau đây không phải là

một vec tơ chỉ phương của  $d$

- A.  $\vec{u}(6; -2; 8)$ .      B.  $\vec{u}(-3; 1; -4)$ .      C.  $\vec{u}(-2; 4; 5)$ .      D.  $\vec{u}(3; -1; 4)$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$  Điểm nào sau đây thuộc đường

thẳng  $d$

- A.  $A(1; -2; 8)$ .      B.  $B(2; -4; -5)$ .      C.  $C(-2; 4; 5)$ .      D.  $D(3; -1; 4)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$  Điểm nào sau đây không thuộc

đường thẳng  $d$

- A.  $A(1; 3; 2)$ .      B.  $B(3; 2; 5)$ .      C.  $C(-3; 5; -4)$ .      D.  $D(3; 3; 5)$ .

**Câu 7.** Viết phương trình đường thẳng ( $d$ ) đi qua điểm  $A(1; 2; -1)$  và nhận vec tơ  $\vec{u}(1; 2; 3)$  làm vec tơ chỉ phương

- A.  $(d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  .      B.  $(d) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  .      C.  $(d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$  .      D.  $(d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}$  . Phương trình nào sau đây là phương trình của  $d$

- A.  $(d) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2t \end{cases}$  .      B.  $(d) \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}$  .      C.  $(d) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$  .      D.  $(d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 1; 0)$  và  $B(2; 0; 2)$  có phương trình:

- A.  $(d) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases}$  .      B.  $(d) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  .      C.  $(d) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$  .      D.  $(d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$  .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng đi qua hai điểm  $M(1; -1; 2)$  và  $N(2; 0; 0)$  có phương trình:

- A.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$       B.  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$       C.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$       D.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(-1; 3; 2)$  và mặt phẳng  $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$ .

Đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình là:

- A.  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$  .      B.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$  .      C.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$  .      D.

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A(4; 2; -6)$  và song song với

$$\text{đường thẳng } d : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -6 - t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

**Câu 13.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng  $d: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{1}$  trong các mặt phẳng sau đây, mặt phẳng nào song song với đường thẳng (d)?

**A.**  $5x - 3y + z - 2 = 0$ . **B.**  $x + y + 2z + 9 = 0$ . **C.**  $5x - 3y + z + 2 = 0$  **D.**  $5x - 3y + z - 9 = 0$

**Câu 14.** Cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{3}$  và mặt phẳng (P):  $3x + 5y - 2z - 4 = 0$ . Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

**A.** (4; 0; 4) **B.** (0; 0; -2) **C.** (2; 0; 1) **D.** (-2; 2; 0)

**Câu 15.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P):  $x + 2z + 1 = 0$ . Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có vec tơ chỉ phương là:

**A.**  $\vec{u}(1; 2; 1)$ . **B.**  $\vec{u}(1; 2; 0)$ . **C.**  $\vec{u}(-1; 0; -2)$ . **D.**  $\vec{u}(1; 0; -2)$ .

**Câu 16.** Trong không gian Oxyz, Cho  $(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ ;  $(d_2): \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$ , đường thẳng (d) vuông góc với  $(d_1)$  và  $(d_2)$  Có vec tơ chỉ phương là:

**A.**  $\vec{u}(1; -2; 1)$ . **B.**  $\vec{u}(9; -11; -5)$ . **C.**  $\vec{u}(1; 7; -2)$ . **D.**  $\vec{u}(7; -8; 4)$ .

**Câu 17.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng  $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{m} = \frac{2-z}{3}$  và  $(d_2): \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ . Tìm tất cả giá trị thực của m để  $(d_1) \perp (d_2)$ .

**A.**  $m = 5$  **B.**  $m = 1$  **C.**  $m = -5$  **D.**  $m = -1$

**Câu 18.** Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm  $M(1; -1; 2)$  và vuông góc với mp( $\beta$ ):  $2x + y + 3z - 19 = 0$  là:

**A.**  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$  **B.**  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$  **C.**  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$  **D.**  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình:

$$\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Xét mặt phẳng (P):  $10x + 2y + mz + 11 = 0$ , m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ .

**A.**  $m = -2$  **B.**  $m = 2$ . **C.**  $m = -52$  **D.**  $m = 52$

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  $3x - 4y + 2z - 2016 = 0$ . Trong các đường thẳng sau đường thẳng song song với mặt phẳng (P).

**A.**  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{1-z}{-1}$  **B.**  $d_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$   
**C.**  $d_3: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{1-z}{4}$  **D.**  $d_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{2}$

## II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = (3; 4; 1)$  là một vectơ chỉ phương.
- B. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = (-3; -4; 1)$  là một vectơ chỉ phương.
- C. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = (3; 4; -1)$  là một vectơ chỉ phương.
- D. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = (-6; -8; 2)$  là một vectơ chỉ phương.

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm  $M(7; -3; -1)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- B. Điểm  $N(-1; 1; -5)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- C. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = (4; -2; 3)$  là một vectơ chỉ phương.
- D. Đường thẳng  $d$  nhận  $\vec{u} = -(-4; 2; -3)$  là một vectơ chỉ phương.

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm  $Q(2; -1; 2)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- B. Điểm  $P(1; 2; 3)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- C. Điểm  $M(-1; -2; -3)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- D. Điểm  $N(-2; 1; -2)$  thuộc đường thẳng  $d$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm  $M(-3; 5; 3)$  không thuộc đường thẳng  $d$ .
- B. Điểm  $N(1; 3; -1)$  không thuộc đường thẳng  $d$ .
- C. Điểm  $P(3; 5; 3)$  không thuộc đường thẳng  $d$ .
- D. Điểm  $Q(1; 2; -3)$  không thuộc đường thẳng  $d$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(3; -1; 4)$  và có một vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (-2; 4; 5)$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là  $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$
- B. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$
- C. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là  $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

D. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là 
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(1; -2; 1)$ ,  $N(0; 1; 3)$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình đường thẳng qua hai điểm  $M, N$  là  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$ .

B. Phương trình đường thẳng qua hai điểm  $M, N$  là  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$ .

C. Phương trình đường thẳng qua hai điểm  $M, N$  là  $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ .

D. Phương trình đường thẳng qua hai điểm  $M, N$  là  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng có phương trình tham số là  $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$ . Các

mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  là  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$

B. Phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  là  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

C. Phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  là  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$

D. Phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  là  $\frac{1-x}{-2} = \frac{2-y}{1} = \frac{-z-3}{-1}$

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và đường thẳng  $d: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$ . Các

mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với đường thẳng  $d$  có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

B. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với đường thẳng  $d$  có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

C. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với đường thẳng  $d$  có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

D. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với đường thẳng  $d$  có phương trình là:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-4; -3; 3)$  và mặt phẳng  $(P): x + y + z = 0$ . Đường thẳng đi qua  $A$ , cắt trục  $Oz$  và song song với  $(P)$  có phương trình là

A.  $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{-7}$ .

B.  $\frac{x+4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

C.  $\frac{x+4}{-4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

D.  $\frac{x+8}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-10}{-7}$ .

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + y - z + 9 = 0$ , đường thẳng  $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$  và điểm  $A(1; 2; -1)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  cắt  $d$  và song song với mặt phẳng  $(P)$ .

A.  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ .

B.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ .

C.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ .

D.  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ .

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; -3; 4)$ , đường thẳng  $d$  có phương trình:  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x + z - 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua  $M$  vuông góc với  $d$  và song song với  $(P)$ .

A.  $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$ .

B.  $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$ .

C.  $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ .

D.  $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$ .

**Câu 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(\alpha): x - 2y + z - 1 = 0$ ,  $(\beta): 2x + y - z = 0$  và điểm  $A(1; 2; -1)$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với cả hai mặt phẳng  $(\alpha), (\beta)$  có phương trình là

A.  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$ .

B.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$ .

C.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ .

D.  $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$ .

### III. TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$  và điểm  $A(1; 2; 3)$ . Phương trình mặt phẳng  $(A; d)$  là: .....

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng đi qua  $A(-2; 4; 3)$ , song song với mặt phẳng  $2x - 3y + 6z + 19 = 0$  có phương trình là: .....

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 4; -3)$ . Viết phương trình mặt phẳng chứa trục tung và đi qua điểm  $A$ . .....

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases} (t \in R)$  và mặt phẳng

$(P): x + 2y - z + 1 = 0$ . Tìm vị trí tương đối của  $d$  và  $(P)$ : .....

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$  cho mặt phẳng  $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$  và hai điểm  $A(1; -2; 3), B(3; 2; -1)$ . Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  qua  $A, B$  và vuông góc với  $(P)$  là: .....

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  trên  $(P)$  là đường thẳng có phương trình: .....



A.  $S = \int_0^2 (x - x^2) dx.$

B.  $S = \int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx.$

C.  $S = \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$  D.  $S = \int_0^2 (x^2 - x) dx.$

**Câu 10:** Cho hình (H) giới hạn bởi parabol  $y = 2x - x^2$  và trục hoành Ox. Thể tích khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh trục Ox bằng:

A.  $\frac{15\pi}{16}.$

B.  $\frac{15\pi}{17}.$

C.  $\frac{16\pi}{15}.$

D.  $\frac{15\pi}{17}.$

**Câu 11:** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+5}{3}$ . Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

A.  $M(3; 4; -5).$

B.  $N(2; -5; 3).$

C.  $P(-3; -4; 5).$

D.  $Q(2; 5; -3).$

**Câu 12:** Trong không gian Oxyz, đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$  có một vectơ chỉ phương là:

A.  $\vec{u}_1 = (2; -1; 3).$

B.  $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3).$

C.  $\vec{u}_3 = (2; 1; 3).$

D.  $\vec{u}_4 = (1; 2; 3).$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho các hàm số  $f(x) = \frac{2x-3}{x}$  và  $g(x) = \frac{3}{x^2}$  xác định trên tập  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a. Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên D.		
b. Hàm số $F(x) = 2x - 3 \ln x  + C$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ .		
c. Cho $F(1) = 5$ , khi đó $F(x) = 2x - 3 \ln x  + 3$ .		
d. $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ thỏa mãn $G(1) = 4$ . Khi đó $G(2) = 2$ .		

**Câu 2.** Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 - x, x = -1, x = 2$  và trục hoành. Gọi S là diện tích của D.

a)  $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx.$

b)  $S = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^2 (x^2 - x) dx.$

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox được tính bằng  $V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx.$

d)  $S = \frac{5}{6}.$

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + 3, & x < 2 \end{cases}$

a)  $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2) dx$

b)  $\int_2^3 f(x) dx = \frac{41}{16}$

c)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{4}$

d)  $\int_{-1}^3 f(x)dx = \frac{16}{3}$

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1;1;0)$ ,  $B(1;-1;2)$ ,  $C(1;-2;1)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$  là  $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ .

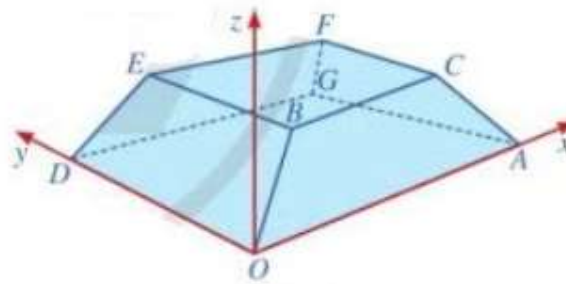
b) Vecto  $\vec{n} = (1; 2; 3)$  là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$ .

c) Vecto  $\vec{u} = (1; 1; 0)$  là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua  $O$  và chứa đường thẳng  $AB$ .

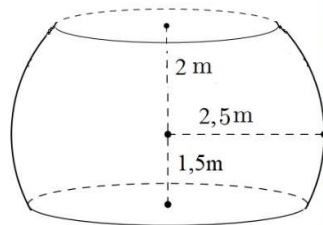
d) Vecto  $\vec{v} = (1; 2; 3)$  là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng  $AB$  và  $OC$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn ( Tự luận ).** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Ở mỗi câu thí sinh điền đáp án của câu đó.

**Câu 1:** Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt  $OAGD.BCFE$  có hai đáy song song với nhau. Mặt sân  $OAGD$  là hình chữ nhật và được gắn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân  $OAGD$  có chiều dài  $OA = 100m$ , chiều rộng  $OD = 60m$  và tọa độ điểm  $B(10; 10; 8)$ . Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(OACB)$  có dạng  $ax + y + cz + d = 0$ . Tính giá trị biểu thức  $a + c + d$ .



**Câu 2:** Mặt trong của một hầm biogas có hình dạng là một phần của mặt cầu đã cắt bỏ hai phần của nó bằng hai mặt phẳng song song với nhau (như hình vẽ). Bán kính của mặt cầu bằng  $2,5m$ . Mặt đáy phía dưới cách tâm một khoảng bằng  $1,5m$ . Mặt đáy phía trên cách tâm một khoảng bằng  $2m$ . Tính gần đúng thể tích phần bên trong của hầm biogas đó (đơn vị là  $m^3$  và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

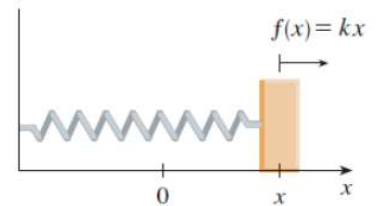


Trả lời: .....

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$  và cho các điểm

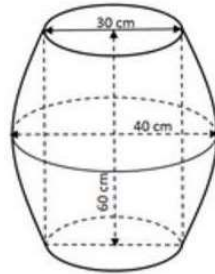
$A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; -1; 1)$ ,  $C(5; -2; 4)$ ,  $D(-1; 1; -1)$ . Trong các điểm đã cho có bao nhiêu điểm không thuộc đường thẳng  $\Delta$ ?

**Câu 4:** [ Mức độ 3 ] Theo Định luật Hooke, lực cản dùng để kéo giãn lò xo thêm  $x$  mét từ độ dài tự nhiên là  $f(x) = k \cdot x$  ( $N/m$ ) là độ cứng của lò xo. Một lực  $50N$  được dùng để kéo giãn lò xo từ  $10cm$  đến độ dài  $15cm$ . Hỏi cần thực hiện một công là bao nhiêu để kéo giãn lò xo từ  $15cm$  đến  $20cm$ ?



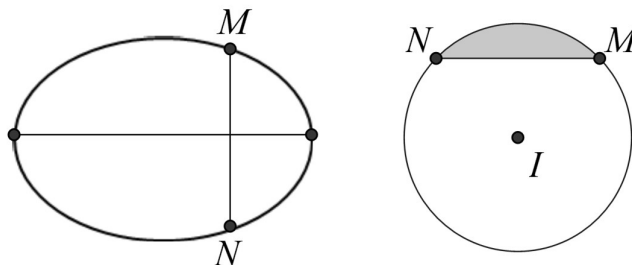
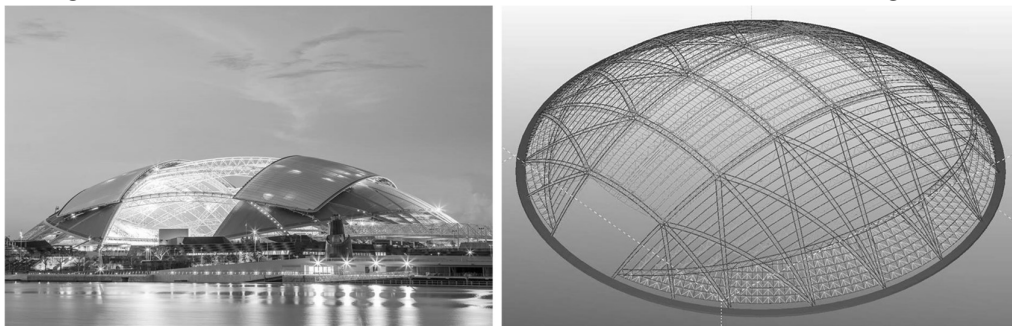
**Đáp án:** .....

**Câu 5:** Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là  $30cm$ , đường kính lớn nhất của thân thùng là  $40cm$ , chiều cao thùng là  $60cm$ , cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng Bia hơi. ( làm tròn đến hàng phần chục).



**Đáp án:**

**Câu 6:** Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip ( $E$ ) có trục lớn dài  $150m$ , trục bé dài  $90m$  (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của ( $E$ ) và cắt elip ở  $M, N$  (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm  $I$  (phần tô đậm trong hình 4) với  $MN$  là một dây cung và góc  $\widehat{MIN} = 90^\circ$ . Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là  $200 BTU / m^3$ . Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất  $50000 BTU$ ?



**CHỦ ĐỀ 11**  
**MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Đại số tổ hợp****a) Quy tắc cộng**

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện, hành động thứ hai có  $n$  cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có  $m + n$  cách hoàn thành.

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong  $k$  hành động ( $k \in \mathbb{N}, k > 2$ ).

**b) Quy tắc nhân**

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có  $m$  cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có  $n$  cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có  $m \cdot n$  cách hoàn thành.

Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi  $k$  hành động liên tiếp ( $k \in \mathbb{N}, k > 2$ ).

**c) Hoán vị**

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử đó. Kí hiệu  $P_n$  là số các hoán vị của  $n$  phần tử. Ta có:

$$P_n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

**d) Chinh hợp**

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử và một số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi kết quả của việc lấy  $k$  phần tử  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho. Kí hiệu  $A_n^k$  là số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Ta có:

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

**e) Tổ hợp**

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử và một số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi tập con gồm  $k$  phần tử được lấy ra từ  $n$  phần tử của  $A$  được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đó. Kí hiệu  $C_n^k$  là số

tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử với  $1 \leq k \leq n$ . Ta có:  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ .

**Quy ước:**  $0! = 1, C_n^0 = 1$ . Với những quy ước đó, ta có:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

**2. Xác suất của biến cố****a) Một số khái niệm**

- Không gian mẫu  $\Omega$  là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.
- Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng  $\emptyset$  là biến cố không thể,  $\Omega$  là biến cố chắc chắn,  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  là biến cố đối của biến cố  $A$ .
- Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố  $A$ , ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

Xác suất của biến cố  $A$ , kí hiệu là  $P(A)$ , bằng tỉ số  $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ , ở đó  $n(A), n(\Omega)$  lần lượt là số phần tử

của hai tập hợp  $A, \Omega$ . Như vậy:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .

**b) Tính chất của xác suất**

Xét phép thử  $T$  với không gian mẫu là  $\Omega$ . Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1$ ;
- $0 \leq P(A) \leq 1$  với mỗi biến cố  $A$ ;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  với mỗi biến cố  $A$ .

**c) Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập**

Cho hai biến cố  $A$  và  $B$  cùng liên quan đến phép thử  $T$  và các kết quả của  $T$  là đồng khả năng. Khi đó  $A, B$  là các tập con của không gian mẫu.

- Đặt  $C = A \cup B$ . Khi đó  $C$  là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố  $A$  và  $B$ , kí hiệu là  $A \cup B$ .

- Đặt  $D = A \cap B$ . Khi đó  $D$  là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố  $A$  và  $B$ , kí hiệu là  $A \cap B$  hay  $AB$ .

\* Nếu  $A \cap B = \emptyset$  thì  $A$  và  $B$  gọi là *hai biến cố xung khắc*.

\* Hai biến cố  $A$  và  $B$  được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm

ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

**Chú ý**

\*  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

\* Nếu hai biến cố  $A$  và  $B$  là độc lập thì  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

### 3. Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố  $A$  và  $B$ . Xác suất của biến cố  $A$  với điều kiện biến cố  $B$  đã xảy ra được gọi là *xác suất của  $A$  với điều kiện  $B$* , kí hiệu là  $P(A|B)$ .

Nếu  $P(B) > 0$  thì  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra:

Nếu  $P(B) > 0$  thì  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ .

**Chú ý**

\* Nếu  $A, B$  là hai biến cố bất kì thì  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ .

Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất*.

\* Cho hai biến cố  $A$  và  $B$  với  $P(B) > 0$ . Khi đó, ta có:  $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ .

\* Cho hai biến cố  $A, B$  với  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ . Khi đó,  $A$  và  $B$  là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi  $P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B})$  và  $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$ .

### 4. Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

#### a) Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố  $A, B$  với  $0 < P(B) < 1$ , ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}).$$

#### b) Công thức Bayes

Cho hai biến cố  $A, B$  với  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , ta có:  $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$ .

**Nhận xét:** Với  $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$  thì công thức Bayes còn có dạng

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}$$

## B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

1. Cho các tập hợp:  $A = \{M; N; P; Q; R; S\}; B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\};$

$$C = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 9\}.$$

Nếu lập một mật khẩu dài 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó 1 kí tự đầu tiên thuộc A, 2 kí tự tiếp theo thuộc B và 5 kí tự cuối cùng thuộc C thì số cách lập mật khẩu đó là:

A. 8!

B.  $6C_8^2 C_{10}^5$ .

C.  $6A_8^2 A_{10}^5$ .

D.

$$6C_8^2 C_{10}^5 \cdot 8!.$$

**Câu 2.** Một lớp học có 20 bạn nam và 15 bạn nữ. Số cách chọn 10 bạn trực nhật lớp sao cho có cả bạn nam và bạn nữ là:

- A.  $C_{35}^{10}$ .                      B.  $A_{35}^{10}$ .                      C.  $C_{15}^{10} + C_{20}^{10}$ .                      D.  $C_{35}^{10} - C_{15}^{10} - C_{20}^{10}$ .
- Câu 3.** Trường Minh Phúc có tỷ lệ học sinh giỏi môn tin là 0,3; tỉ lệ môn tiếng Anh là 0,4; tỉ lệ giỏi cả hai môn trên là 0,25. Chọn ngẫu nhiên 1 một học sinh của trường. Xác suất chọn được học sinh giỏi ít nhất một trong hai môn trên là:  
A. 0,95.                      B. 0,45.                      C. 0,15.                      D. 0,7.
- Câu 4.** Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 4 lần liên tiếp. Xác suất của biến cố “Tổng số chấm xuất hiện ở 4 lần gieo lớn hơn 5” là:  
A.  $1 - \frac{4}{6^4}$ .                      B.  $\frac{5}{6^4}$ .                      C.  $1 - \frac{5}{6^4}$ .                      D.  $\frac{4}{6^4}$ .
- Câu 5.** Học sinh lớp 12A tham gia các câu lạc bộ bóng bàn và cờ vua của trường. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên bằng 0,2, còn xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ bóng bàn bằng 0,25. Xác suất chọn được học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ bóng bàn là:  
A. 0,8.                      B. 0,95.                      C. 0,05.                      D. 0,2.
- Câu 6.** Một thành phố có 25% người đàn ông nghiện thuốc lá, trong số những người đàn ông nghiện thuốc lá có 41% người đàn ông bị bệnh viêm phổi. Chọn ngẫu nhiên một người đàn ông trong thành phố. Xác suất người đàn ông được chọn bị bệnh viêm phổi, biết người đó nghiện thuốc lá, là:  
A.  $\frac{25}{400}$ .                      B.  $\frac{25}{41}$ .                      C.  $\frac{66}{400}$ .                      D.  $\frac{41}{400}$ .
- Câu 7.** Khi tìm hiểu về việc học tiếng Anh của một trường phổ thông, người ta thấy rằng có 70% học sinh tự học tiếng Anh bằng hình thức học trực tuyến. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Khi đó, xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh, biết học sinh đó tự học bằng hình thức trực tuyến, là 0,8; xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh, biết không tự học bằng hình thức trực tuyến, là 0,3. Xác suất chọn được học sinh giỏi tiếng Anh là:  
A. 0,24.                      B. 0,86.                      C. 0,7.                      D. 0,65.
- Câu 8.** Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 4 quân Át. Bạn Hoa rút ngẫu nhiên 1 quân bài không phải Át (không hoàn lại), sau đó bạn Dung rút ngẫu nhiên 1 quân bài. Xác suất bạn Dung rút được quân Át là:  
A.  $\frac{1}{51}$ .                      B.  $\frac{1}{13}$ .                      C.  $\frac{1}{17}$ .                      D.  $\frac{4}{51}$ .
- Câu 9.** Khi điều tra về hoạt động sử dụng máy tính và tình trạng cận thị của trẻ em ở một tỉnh thì được kết quả:  
- Có 10% trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính.  
- Có 30% trẻ em bị cận thị.  
- Trong những trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính có 54% trẻ em bị cận thị.  
Chọn ngẫu nhiên 1 trẻ em. Xác suất trẻ em được chọn thường xuyên sử dụng máy tính, biết trẻ e đó bị cận thị, là:  
A. 0,94.                      B. 0,14.                      C. 0,18.                      D. 0,0162.
- Câu 10.** Một động cơ điện có hai van bảo hiểm cùng hoạt động. Xác suất hoạt động tốt của van I là 0,9, của van II là 0,72. Xác suất hoạt động tốt của van I, biết van II hoạt động tốt, là 0,96. Giả sử van I hoạt động tốt, xác suất hoạt động tốt của van II là:  
A. 0,675.                      B. 0,768.                      C. 0,66.                      D. 0,78.
- Câu trắc nghiệm đúng sai**
- Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.
- Câu 11.** Cho tập hợp A gồm 20 số nguyên dương không vượt quá 20.  
a) Số cách chọn 4 số nguyên dương từ tập A là  $A_{20}^4$ .  
b) Tích của 4 số nguyên dương là số lẻ khi và chỉ khi cả 4 số là số lẻ.  
c) Tập hợp A có 10 số lẻ.  
d) Số cách chọn ra 4 số từ tập A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn là  $A_{20}^4 - A_{10}^4$ .
- Câu 12.** Cho tập hợp A gồm tất cả các chữ số là 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.  
a) Tập hợp A có 10 phần tử.

- b) Số tập con gồm 6 phần tử của A là  $A_{10}^6$ .
- c) Với mỗi tập con gồm 6 phần tử của A thì có đúng một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự giảm dần.
- d) Có  $A_{10}^6$  số gồm 6 chữ số có dạng  $\overline{abcdeg}$  thỏa mãn  $a > b > c > d > e > g$ .

**Câu 13.** Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 30 học sinh giỏi toán, 35 học sinh giỏi tiếng Anh, 25 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn giỏi môn Toán".

B: "Học sinh được chọn giỏi môn tiếng Anh".

- a)  $P(A)=0,75$ .
- b)  $P(B)=0,875$ .
- c)  $P(A \cap B)=0,625$ .
- d)  $P(A \cup B)=1$ .

**Bài 13:** Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 30 học sinh giỏi môn Toán, 35 học sinh giỏi môn Tiếng Anh, 25 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố:

A: " Học sinh được chọn học giỏi môn Toán"

B: " Học sinh được chọn học giỏi môn Tiếng Anh"

- a)  $P(A) = 0,75$ .
- b)  $P(B) = 0,875$ .
- c)  $P(A \cap B) = 0,625$ .
- d)  $P(A \cup B) = 1$ .

**Bài 14.** Hai xạ thủ An và Bình bắn vào cùng một mục tiêu ở hai thời điểm khác nhau với Xác suất bắn trúng mục tiêu lần lượt là 0,6 và 0,7 . Xét các biến cố:

A: "Xạ thủ An bắn trúng mục tiêu";

B : "Xạ thủ Bình bắn trúng mục tiêu".

- a)  $P(\bar{A}) = 0,6; P(\bar{B}) = 0,7$ .
- b) Hai biến cố  $\bar{A}, \bar{B}$  là độc lập.
- c) Xác suất cả hai xạ thủ đều không bắn trúng mục tiêu là 0,42 .
- d) Xác suất cả hai xạ thủ đều bắn trúng mục tiêu là 0,58 .

**Bài 15:** . Một lớp học có 17 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Cô giáo gọi ngẫu nhiên lần lượt 2 học sinh (có thứ tự) lên trả lời câu hỏi. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam";

B : "Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nữ".

- a)  $P(B | A) = 0,575$ .
- b)  $P(B | \bar{A}) = 0,6$
- c)  $P(\bar{B} | A) = 0,425$
- d)  $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,4$ .

**Bài 16.** Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất 1 lần. Xét các biến cố:

A: "Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số 5" ;

B : "Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số lẻ".

- a)  $P(A) = \frac{5}{6}$ .
- b)  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ .
- b)  $P(B \setminus A) = 1$ .
- b)  $P(A \setminus B) = \frac{1}{2}$

**Câu 17.** Trong một hộp có 10 quả bóng màu xanh và 12 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có khối lượng và kích thước như nhau. Bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng, mỗi lần lấy 1 quả và không hoàn lại. Xét các biến cố:

A : "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu xanh";

B : "Lần thứ hai lấy được quả bóng màu xanh".

- a)  $P(A) = \frac{5}{11}$ .

b)  $P(B|A) = \frac{10}{21}$ .

c)  $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{7}$ .

d)  $P(B) = \frac{5}{11}$ .

**Câu 18.** Một cửa hàng có hai loại bóng đèn Led, trong đó có 65% bóng đèn Led là màu trắng và 35% bóng đèn Led là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn Led màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn Led màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn Led từ cửa hàng. Xét các biến cố:

$A$ : "Khách hàng chọn được bóng đèn Led màu trắng";

$B$ : "Khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng".

a)  $P(\bar{A}) = 0,65$ .

b)  $P(B|A) = 0,02$ .

c)  $P(B|\bar{A}) = 0,3$ .

d)  $P(B) = 0,9765$ .

**Câu 19.** Một kho hàng có 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 1% sản phẩm loại I bị hỏng, 4% sản phẩm loại II bị hỏng. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng như nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Xét các biến cố:

$A$ : "Khách hàng chọn được sản phẩm loại I";

$B$ : "Khách hàng chọn được sản phẩm không bị hỏng".

a)  $P(A) = 0,85$ .

b)  $P(B|A) = 0,99$ .

c)  $P(B) = 0,9855$ .

d)  $P(A|B) = 0,95$ .

**Câu 20.** Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở I và II. Số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39%. Tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở I, cơ sở II lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố:

$A_1$ : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất";

$A_2$ : "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất";

$B$ : "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

a)  $P(A_1) = 0,39$ .

b)  $P(B|A_2) = 0,82$ .

c)  $P(B) = 0,8871$ .

d)  $P(A_1|B) = 0,55$ .

### Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 21.** Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào một hàng dọc sao cho 2 bạn nam bất kì không đứng liền nhau và 2 bạn nữ bất kì không đứng liền nhau?

**Câu 22.** Có bao nhiêu cách lập một mật khẩu là một dãy 8 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số mà số 1 xuất hiện 3 lần, số 2 xuất hiện 3 lần, số 3 xuất hiện 2 lần?

**Câu 23.** Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 13 tứ quý (mỗi tứ quý là một bộ 4 quân bài cùng giá trị, ví dụ 4 quân Át, 4 quân K,...). Rút ngẫu nhiên 6 quân bài. Xác suất rút được 6 quân bài bao gồm 1 tứ quý và 2 quân bài còn lại ở 2 tứ quý khác nhau là  $\frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là

phân số tối giản. Giá trị của  $a$  là bao nhiêu?

**Câu 24.** Hai bạn Hải và Bình cùng tham dự một kì thi trắc nghiệm, vòng 1 thi Toán, vòng 2 thi Tiếng Anh. Mỗi vòng thi có 8 mã đề được đánh số từ 1 đến 8. Mỗi bạn phải bốc thăm ngẫu nhiên

1 đề Toán và 1 đề Tiếng Anh. Xét biến cố  $A$ : “Hai bạn có chung mã đề ở duy nhất một vòng thi”.

Xác suất của biến cố  $A$  là  $\frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số tự nhiên khác 0,  $b < 50$ . Giá trị của  $a + b$  là bao nhiêu?

**Câu 25.** Câu lạc bộ văn nghệ của trường Giải Phóng có 40 bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai loại đàn là organ và guitar, trong đó có 27 bạn biết chơi đàn organ, 25 bạn biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn biết chơi đàn organ, biết bạn đó chơi được đàn guitar, là bao nhiêu?

**Câu 26.** Lớp 12A có 37 học sinh, trong đó có 15 học sinh thích môn Tin học, 20 học sinh thích môn Tiếng Anh, 10 học sinh không thích môn nào trong hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là bao nhiêu?

**Câu 27.** Có hai thùng I và II chứa các sản phẩm có khối lượng và hình dạng như nhau. Thùng I có 5 chính phẩm và 4 phế phẩm, thùng II có 6 chính phẩm và 8 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng I sang thùng II. Sau đó, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng II để sử dụng. Xác suất lấy được chính phẩm từ thùng II là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

**Câu 28.** Tỷ lệ bị bệnh cúm tại một địa phương bằng 0,25. Khi thực hiện xét nghiệm chẩn đoán, nếu người có bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính là 96%, nếu người không bị bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính 8%. Chọn ngẫu nhiên 1 người tại địa phương đó. Xác suất người được chọn có phản ứng dương tính là bao nhiêu?

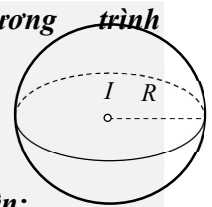
**Câu 29.** Thực hiện khảo sát tại một địa phương mà số trẻ em nam gấp 1,5 lần số trẻ em nữ, có 8% số trẻ em nam bị hen phế quản, 5% số trẻ em nữ bị hen phế quản. Chọn ngẫu nhiên 1 trẻ em. Giả sử trẻ em được chọn bị hen phế quản. Xác suất chọn được trẻ em nam là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Câu 30.** Trường Bình Phúc có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi đàn guitar. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc cũng biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi đàn guitar. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc là bao nhiêu?

## CHUYÊN ĐỀ 12 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$  và có bán kính  $R$  có phương trình  $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .
- Phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  là phương trình của mặt cầu có tâm  $I(a; b; c)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .
- Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước  $x^2, y^2, z^2$  phải bằng nhau và  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ .



### B. BÀI TẬP

#### I. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 8$ . Tính bán kính  $R$  của  $(S)$ .  
 A.  $R = 2\sqrt{2}$       B.  $R = 64$       C.  $R = 8$       D.  $R = 4$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3$  có bán kính bằng  
 A. 9      B.  $2\sqrt{3}$       C. 3      D.  $\sqrt{3}$

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$ . Tâm của  $(S)$  có tọa độ là:  
 A.  $(3; -1; 1)$       B.  $(-3; -1; 1)$       C.  $(-3; 1; -1)$       D.  $(3; 1; -1)$

**Câu 4** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$ .

A.  $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$  B.  $I(1; -2; 4), R = 20$  C.  $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$  D.

$I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$ . Bán kính của mặt cầu

đã cho bằng: A. 3. B.  $\sqrt{15}$ . C.  $\sqrt{7}$ . D. 9.

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $I(1; 1; 1)$  và  $A(1; 2; 3)$ . Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$  B.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$  D.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ . Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu  $(S)$ .

A.  $I(-4; 1; 0), R = 2$ . B.  $I(-4; 1; 0), R = 4$ . C.  $I(4; -1; 0), R = 2$ . D.

$I(4; -1; 0), R = 4$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ . Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu  $(S)$ :

A.  $I(-4; 1; 0), R = 2$ . B.  $I(-4; 1; 0), R = 4$ . C.  $I(4; -1; 0), R = 2$ . D.

$I(4; -1; 0), R = 4$ .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $I(1; 1; 1)$  và  $A(1; 2; 3)$ . Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$  B.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$  D.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; -2; 3)$ . Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên trục  $Ox$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm  $I$  bán kính  $IM$ ?

A.  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

B.  $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C.  $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D.  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 7), B(-3; 8; -1)$ . Mặt cầu đường kính  $AB$  có phương trình là

A.  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$ . B.  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$ .

C.  $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$ . D.  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$ .

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A.  $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$ .

B.  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$ .

C.  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$ .

D.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$ .

**Câu 13.** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình mặt cầu tâm  $I(2; 1; -2)$  bán kính  $R = 2$  là:

A.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2^2$ .

B.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$ .

C.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$ .

D.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ .

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính  $R = 2$ ?

A.  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ . B.

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$ .

C.  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$ . D.

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$ .

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình mặt cầu có tâm  $I(2;1;-4)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$ .

A.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$ .

B.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$ .

C.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$ .

D.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$ .

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(3;2;-1)$  và đi qua điểm  $A(2;1;2)$ . Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với  $(S)$  tại  $A$ ?

A.  $x + y + 3z - 9 = 0$

B.  $x + y - 3z + 3 = 0$

C.  $x + y - 3z - 8 = 0$

D.

$x - y - 3z + 3 = 0$

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$ . Số điểm chung của  $\Delta$  và  $(S)$  là:

A.3.

B.0.

C.1

D.2.

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ . Số điểm chung của  $\Delta$  và  $(S)$  là:

A.0

B.0.

C.2.

D.3.

**II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI:**

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$  có tâm  $I$  và bán kính  $R$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(0;0;2)$ .

B. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 9$ .

C. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(0;0;-2)$ .

D. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 3$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$  có tâm  $I$  và bán kính  $R$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm  $M(-1;0;3)$  nằm trong mặt cầu  $(S)$ , với  $M(-1;0;3)$ . B. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 4$

C. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(-3;0;2)$ .

D. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 16$ .

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2;0;2)$  và mặt cầu  $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm  $M(2;0;2)$  thuộc mặt cầu  $(S)$ .

B. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 2\sqrt{2}$ .

C. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(0;-2;2)$ .

D. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = 8$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là 20.

B. Bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $2\sqrt{5}$ .

C. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(-1;2;-4)$ .

D. Tọa độ tâm mặt cầu  $(S)$  là  $I(1;-2;4)$

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các phương trình sau:

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$ ,  $(S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$

$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$ ,  $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$ .

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A.  $(S_1)$  là phương trình của một mặt cầu.

- B.  $(S_2)$  là phương trình của một mặt cầu.  
 C.  $(S_3)$  không phải là phương trình của một mặt cầu.  
 D.  $(S_4)$  không phải là phương trình của một mặt cầu.

### III. TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$ , tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$  là phương trình của một mặt cầu.

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , có tất cả bao nhiêu giá nguyên của  $m$  để  $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$  là phương trình một mặt cầu?

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , xét mặt cầu  $(S)$  có phương trình dạng  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$ . Tập hợp các giá trị thực của  $a$  để  $(S)$  có chu vi đường tròn lớn bằng  $8\pi$  là

**Câu 4.** Cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình  $2x - 2y - z + 9 = 0$ . Tính bán kính của đường tròn  $(C)$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt cầu  $(S)$ .

**Câu 5** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$  và điểm  $M(1; -2; 0)$ . Mặt cầu tâm  $M$ , bán kính bằng  $\sqrt{3}$  cắt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

**Câu 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$  và mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $(P)$  tiếp xúc với  $(S)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$  và mặt phẳng  $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$  cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ . Mặt phẳng tiếp xúc với  $(S)$  và song song với mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$  có phương trình là:

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + z + 7 = 0$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$ . Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(P)$  và cắt mặt cầu

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$  và mặt phẳng  $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$ . Lập phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với  $(S)$ ; song song với  $(\alpha)$  và cắt trục  $Oz$  ở điểm có cao độ dương

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 2)$ ,  $C(0; -3; 0)$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$  là

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 2; 1)$ ,  $N\left(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $OMN$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(Oxz)$ .

- A.  $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$ .  
 B.  $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ .  
 C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ .  
 D.  $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ .

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $I(a; b; c)$  là tâm mặt cầu đi qua điểm  $A(1; -1; 4)$  và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính  $P = a - b + c$ .

- A.  $P = 6$ .  
 B.  $P = 0$ .  
 C.  $P = 3$ .  
 D.  $P = 9$ .



C.  $P(AB) = P(B)P(A|\bar{B})$ .

D.  $P(AB) = P(B)P(A|B)$ .

**Câu 3.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 (2x + 1)dx$

A.  $I = 6$ .

B.  $I = 5$ .

C.  $I = 2$ .

D.  $I = 4$ .

**Câu 4.** Cho  $\int_2^5 f(x)dx = 10$ . Khi đó  $\int_5^2 4f(x)dx$  bằng:

A. 32.

B. - 40.

C. 36.

D. 40

**Câu 5.** Cho hai biến cố  $A, B$  sao cho  $P(B) = 0,7$  và  $P(AB) = 0,2$ . Tính  $P(A|B)$ .

A.  $\frac{7}{10}$ .

B.  $\frac{2}{7}$ .

C.  $\frac{7}{50}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 6.** Cho hai biến cố  $A$  và  $B$  độc lập, biết  $P(A) = 0,4; P(B) = 0,7$ . Khi đó  $P(\bar{B}|A)$  bằng

A.  $\frac{7}{10}$ .

B.  $\frac{4}{7}$ .

C.  $\frac{7}{25}$ .

D.  $\frac{3}{10}$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 3x - 2z + 2 = 0$  đi qua điểm nào sau đây?

A.  $B(4; 2; 1)$ .

B.  $A(1; 2; 4)$ .

C.  $D(2; 1; 4)$ .

D.  $C(2; 4; -1)$ .

**Câu 8.** Một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 12 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Minh lấy 1 viên bi từ hộp sau đó bạn Châu lấy viên bi thứ hai. Tính xác suất để bạn Châu lấy được viên bi màu đỏ.

A.  $\frac{3}{5}$ .

B.  $\frac{2}{5}$ .

C.  $\frac{4}{5}$ .

D.  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 9.** Cho  $P(A) = 0,4; P(B|\bar{A}) = 0,2$ . Giá trị của  $P(\bar{B}\bar{A})$  là

A. 0,2.

B. 0,08.

C. 0,4.

D. 0,12.

**Câu 10.** Phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm là gốc tọa độ và bán kính  $R = 5$  là

A.  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

B.  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

C.  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ .

D.  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .

**Câu 11.** Phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 2; 0)$  và  $(S)$  đi qua  $A(2; -2; 1)$  là

A.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$ .

B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$

C.  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$ .

D.  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 12.** Có hai chiếc hộp đựng bóng. Hộp I có 7 quả bóng trắng và 8 quả bóng xanh. Hộp II có 5 quả bóng trắng và 3 quả bóng xanh. Trước tiên, từ hộp I lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng rồi cho vào hộp II. Sau đó, từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng. Xác suất để quả bóng được lấy ra màu trắng là

A.  $\frac{11}{18}$ .

B.  $\frac{61}{128}$ .

C.  $\frac{83}{135}$ .

D.  $\frac{82}{135}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hai biến cố  $A$  và  $B$  có  $P(A) = 0,6, P(B) = 0,4, P(AB) = 0,2$ .

a)  $P(\bar{A}) = 0,6$ .

b)  $P(\bar{B}) = 0,6$ .

c)  $P(A|B) = 0,4$ .

d)  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ .

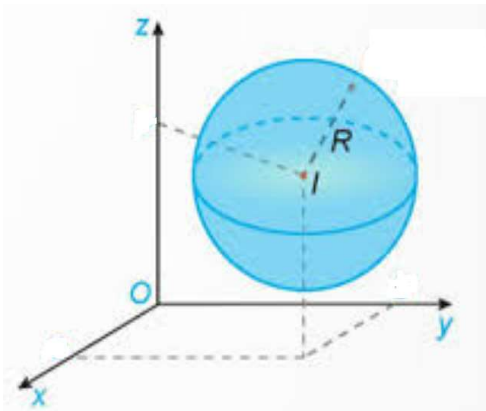
**Câu 2.** Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 15 học sinh nam và 25 học sinh nữ. Khi tổng kết cuối năm, lớp có 20 học sinh giỏi, trong đó có 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp.

- Xác suất học sinh được chọn là học sinh giỏi bằng 0,5.
- Xác suất học sinh được chọn là học sinh nữ bằng 0,6.
- Xác suất học sinh được chọn vừa là học sinh giỏi và là học sinh nữ bằng 0,625.
- Biết rằng học sinh được chọn là nữ, xác suất học sinh đó là học sinh giỏi bằng 0,48.

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$  và hai điểm  $A(0;2;0)$ ,  $B(2;-6;-2)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  thuộc  $(S)$  thỏa mãn  $\overline{MA}\overline{MB}$  có giá trị nhỏ nhất.

- Tâm của mặt cầu  $(S)$  là  $I(-1;2;1)$ .
- Điểm  $A$  nằm trong mặt cầu  $(S)$ .
- Phương trình mặt cầu  $(S')$  tâm  $A$  đi qua điểm  $B$  là:  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 72$ .
- Tổng  $a+b+c$  bằng 1.

**Câu 4.** Hình 1 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí  $I(1; 2; 2)$  trong không gian  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10000 m .



Hình 1

- Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km .
- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$ .
- Điểm  $A(1;2;6)$  nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.
- Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là  $M(1;2;7)$  và  $N(5;5;5)$ . Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (Tự luận).** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Ở mỗi câu thí sinh điền đáp án của câu đó.

**Câu 1.** Giao hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Biết rằng số chấm trên hai con xúc xắc là số nguyên tố. Tính xác suất để tổng số chấm lớn hơn 6 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 2.** Trong một đêm thi hát, mỗi người phải tham gia hát hai bài : Một bài theo phong cách âm nhạc dân gian, một bài theo phong cách âm nhạc nhạc nhẹ. Một đội có 20 người tham gia đêm thi hát đó. Kết quả là 15 người đạt bài thi theo phong cách âm nhạc dân gian, 17 người đạt bài thi theo phong cách âm nhạc nhạc nhẹ; 2 người không đạt cả hai bài. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó đạt bài thi theo phong cách âm nhạc nhạc nhẹ biết rằng người đó đạt bài thi theo phong cách âm nhạc dân gian (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 3.** Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí  $M$

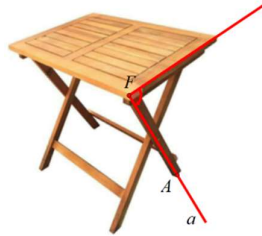
của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí  $M$ . Như vậy, vị trí  $M$  là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian  $Oxyz$ , 4 vệ tinh có tọa độ là  $A(-1;6;3)$ ,  $B(4;8;1)$ ,  $C(9;6;7)$ ,  $D(-15;18;7)$ . Tìm vị trí  $M(x;y;z)$  của vật biết khoảng cách từ  $M$  đến các vệ tinh lần lượt là  $MA = 6$ ,  $MB = 7$ ,  $MC = 12$ ,  $MD = 24$ . Tính  $x + y + z$

**Câu 4.** Lớp 12A có 60% học sinh nam và 40% học sinh nữ. Trong số học sinh nam có 40% là học sinh giỏi; trong số học sinh nữ có 20% là học sinh giỏi. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để học sinh được chọn ra là học sinh nam, biết rằng học sinh đó là học sinh giỏi.

**Câu 5.** Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$ . Điểm  $A$  là chân bàn tiếp xúc với mặt

đất thuộc đường thẳng  $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$  cắt mặt bàn  $(P): x + y - 2z + 6 = 0$  tại điểm  $F$ . Độ dài chân

bàn  $FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$ , khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm?



**Câu 6.** Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

-----HẾT-----